

# ABHANDLUNG

ÜBER DIE

KÖRPER ALS AUCH DER FLUIDA.  
SOWOHL DER FESTEN ELASTISCHEN  
GLEICHGEWICHT UND DIE BEWEGUNG  
ALLGEMEINEN GLEICHUNGEN FÜR DAS

VON

POISSON.

ÜBERSETZT

DURCH

P. OTTO,

HAUPTMANN DER GARDE-ARTILLERIE, DIRECTOR DER KÖNIGL. PULVER-FABRIK

IN BERLIN.



VERLAG

VERLAG VON A. A. HÖLDEL

1845



# ABHANDLUNG

UEBER DIE

ALLGEMEINEN GLEICHUNGEN FÜR DAS  
GLEICHGEWICHT UND DIE BEWEGUNG  
SOWOHL DER FESTEN ELASTISCHEN  
KÖRPER ALS AUCH DER FLUIDA.

VON

**POISSON.**



ÜBERSETZT

DURCH

**F. OTTO,**

HAUPTMANN DER GARDE - ARTILLERIE, DIREKTOR DER KÖNIGL. PULVER - FABRIK  
ZU NEISSE.



**NEISSE,**

VERLAG VON J. A. MÜLLER.

1847.



# **ZWEITE FORTSETZUNG**

## **DER BEMERKUNGEN UEBER DEN EINFLUSS DER UMDREHUNG DER ARTILLERIE- GESCHOSSE AUF IHRE BAHN.**

### **ERSTE ABTHEILUNG**

ENTHALTEND:

DIE AUF NEBENSTEHENDEM TITEL GENANNT ABHANDLUNG POISSON'S IN DER ÜBERSETZUNG  
UND EINE VORREDE, IN WELCHER DAS VERHÄLTNISS JENER ABHANDLUNG ZUR  
MECHANIK ÜBERHAUPT UND DER ZUSAMMENHANG ZWISCHEN IHR UND DEM  
OBENBEZEICHNETEN ARTILLERISTISCHEN GEGENSTANDE INSBESONDERE  
DARGELEGT WIRD.

VON

**F. OTTO,**

HAUPTMANN DER GARDE - ARTILLERIE, DIRECTOR DER KÖNIGL. PULVER - FABRIK  
ZU NEISSE.

Apis more.



**NEISSE,**

VERLAG VON J. A. MÜLLER.

1847.



# FORTSETZUNG ZWEITE

DER  
BEMERKUNGEN UEBER DEN EINFLUSS  
DER UMDREHUNG DER ARTILLERIE-  
GESCHOSSE AUF IHRE BAHN.

## ERSTE ABTHEILUNG

ENTHALTEND:

DIE AUF NERBSTEHENDEN TITEL GEKÜRTE ABHANDLUNG POISSON'S IN DER Uebersetzung  
UND EINE VORREDE, IN WELCHER DAS VERHÄLTNISS ZWISCHEN ABHANDLUNG ZUR  
RECHNUNG GEBRAUCHT UND DEN ZUSAMMENHANG ZWISCHEN IHR UND DEN  
OBERNEHMENDEN ARTILLERISTISCHEN GEGENSTÄNDEN BESONDERE  
DARABERSET WIRD.

OTTO

HARTMANN DER GARDE - ARTILLERIE, DIRECTOR DER KÖNIGL. PULVER - FABRIK

ZU WEISSE.





## Vorrede.

Es war eine Veranlassung von durchaus specieller Natur, welche mich bewog, mich mit dem Inhalte derjenigen Abhandlung des berühmten *Poisson* bekannt zu machen, von welcher ich hier eine Uebersetzung liefere. Diese Abhandlung wurde von *Poisson* am 12. October 1829 in der Academie der Wissenschaften zu Paris gelesen, und demnächst unter dem Titel: „*mémoire sur les équations générales de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques et des fluides*“ in dem „*journal de l'école polytechnique publiée par le conseil de cet établissement, vingtième cahier, Tome XIII*“ veröffentlicht. Je mehr ich mich in dieselbe hineinlas, um destomehr drängte sich mir der Gedanke auf, dass die Beachtung und Anwendung ihres Inhaltes auf diejenigen Erscheinungen, welche sich jene Abhandlung, ihrer Ueberschrift zufolge, zum Vorwurf gewählt hat, von unberechenbaren Folgen sein müsse und höchst wahrscheinlich zu Aufklärungen führen könne, nach denen bisher vergeblich gesucht worden ist. Und da ich Gelegenheit fand, mich zu überzeugen, dass diese vortreffliche Arbeit in Deutschland bisher so gut wie gänzlich unbekannt geblieben war, so glaubte ich etwas Nützliches zu thun, wenn ich es versuchte, auf dem hier eingeschlagenen Wege die Aufmerksamkeit auf dieselbe hinzulenken.

*Poisson* unternimmt es in dieser Abhandlung, die allgemeinen Gleichungen für das Gleichgewicht und die Bewegung sowohl der *festen elastischen Körper als auch der Fluida* aufzustellen. Für diejenigen Körper, welche *nicht* zu den so eben genannten gehören, nemlich für die festen und zugleich als unelastisch betrachteten Körper bietet die Auflösung der darauf bezüglichen statischen und mechanischen Probleme heut zu Tage keine Schwierigkeit mehr dar, und *Poisson* hat sie daher in seiner vorliegenden Abhandlung ausser Acht gelassen. Der wesentliche Unterschied zwischen Körpern dieser Art und den von *Poisson* hier betrachteten liegt darin, dass in den Erörterungen über die Erscheinungen des Gleichgewichts und der Bewegung,



welche bei letzteren vorkommen können, *auf die physikalischen Gründe des Aggregat-Zustandes* Rücksicht genommen werden muss, was bei der Betrachtung des Gleichgewichts und der Bewegung fester unelastischer Körper nicht erforderlich ist. Absolut unelastische Körper mag es freilich wahrscheinlich in der Natur gar nicht geben. Indem wir aber in der Erfahrung Erscheinungen wahrnehmen, von welchen wir *voraussetzen zu dürfen glauben*, dass sie weder qualitativ noch quantitativ durch eine etwa vorhandene geringe Elastizität in einer nach dem Maassstabe unserer *praktischen Zwecke erheblichen* Weise modificirt werden, so *erlauben wir uns*, bei ihnen von der Elastizität ganz zu abstrahiren, und es kommen alsdann auch die physikalischen Gründe für den Aggregat-Zustand der in Rede stehenden Körper gar nicht zur Sprache.

Sobald hiebei von *festen* Körpern die Rede ist, so ergeben sich dafür auch wenig oder gar keine Bedenklichkeiten und die Ergebnisse der Rechnung stimmen mit denen der Erfahrung und Beobachtung gut genug überein, aber schon bei den tropfbar flüssigen Körpern, und namentlich beim Wasser, welches erwiesenermaassen doch einen so überaus geringen Grad von Zusammendrückbarkeit hat, lässt diejenige Theorie, bei welcher auf die physikalischen Gründe des Aggregat-Zustandes nicht eingegangen wird, völlig im Stich. Dieses zeigt sich vorzugsweise dann, wenn tropfbare Flüssigkeiten mit festen Körpern in Berührung treten, namentlich bei den Erscheinungen der Capillarität und bei der Bewegung der tropfbaren Flüssigkeiten in festen Gefässen; ganz augenfällig äussern sodann die einzelnen Theile der festen Wände, mit denen die Flüssigkeiten in Berührung treten, Einwirkungen auf letztere, welche sich ohne ein Eingehen auf die Constitution der Körper überhaupt und ohne die Annahme einer gegenseitigen Einwirkung ihrer kleinsten Theile insbesondere nicht erklären lassen. In noch höherem Grade gilt diess für luftförmige Fluida, sei es, dass man ihre Bewegungen an sich oder mit Rücksicht auf (bewegliche oder unbewegliche) feste Flächen betrachtet, mit denen sie in Berührung kommen.

Für die weiteren Erörterungen über den in Rede stehenden Gegenstand verdienen von den drei Arten von Körpern, welche *Poisson* hier in Betracht gezogen hat, nemlich



die festen elastischen Körper,  
 die tropfbaren Flüssigkeiten,  
 die luftförmigen Fluida,  
 vorzugsweise die beiden letzteren eine besondere Beachtung. Bekanntlich nennt man den Inbegriff aller der Sätze, welche sich auf die Bewegung derselben beziehen: *Hydrodynamik* und hält die Aufgabe dieser Disciplin für gelöst, sobald es gelungen ist, eine gewisse Anzahl von Differenzial-Gleichungen aufzustellen, welche den vollständigen Ansatz des Problems enthalten. Die Integration dieser Gleichungen, bei denen in Bezug auf die Zeit die gegebenen Anfangszustände und in Bezug auf den Raum die gegebenen örtlichen Grenzzustände zu berücksichtigen sind, ist dann streng genommen schon nicht mehr Sache der eigentlichen Hydrodynamik, sondern der Mathematik.

Denkt man sich eine vorhandene tropfbar flüssige oder luftförmige Masse den Vorstellungen der Differenzial-Rechnung gemäss in eine unendlich grosse Anzahl unendlich kleiner Partikelchen geometrisch zertheilt, und hebt eines derselben als Repräsentanten aller übrigen heraus, so kommen bei der Betrachtung dieses Partikelchens in dem Sinne der Hydrodynamik an mathematischen Zeichen vor: die Symbole nachstehender im Allgemeinen als veränderlich zu betrachtender Grössen, nemlich die Symbole

der Zeit,

der drei Raumcoordinaten,

der drei Seiten-Geschwindigkeiten jenes Partikelchens nach der Richtung jeder der drei Coordinaten-Axen,

der Dichtigkeit des Fluidums in dem betrachteten Partikelchen, und des von demselben auf die benachbarten Partikelchen ausgeübten Drucks.

Die Differenzial-Gleichungen, welche die verschiedenen gegenseitigen Beziehungen zwischen den soeben genannten Rechnungselementen ausdrücken sollen, sind bekanntlich zum ersten Male von *d'Alembert* in seinem: *essai d'une nouvelle théorie sur la résistance des fluides*, welcher 1752 erschien, aufgestellt worden und eben so bekannt ist es, dass *Euler* es war, der ihnen in den Memoiren der Berliner Academie (1755) die einfachste Gestalt und diejenige Form gab, die sie noch in unsern Tagen haben. Sie beziehen



sich sowohl auf die tropfbaren Flüssigkeiten, wie auf die luftförmigen Fluida und es ist ein entschiedenes Bedenken *gegen ihre Richtigkeit an sich*, soviel mir bekannt ist, wenigstens in Deutschland und Frankreich wohl niemals erhoben worden. *Littrow* spricht sich in dieser Beziehung in *Gehler's physikalischem Wörterbuche* in der dritten Abtheilung des sechsten Bandes unter dem Artikel: „Mechanik“ Seite 1527 noch im Jahre 1837 wörtlich folgendergestalt aus:

„*Da man ein jedes mechanische Problem als aufgelöset betrachtet, wenn man die Gleichung aufgestellt hat, welche diese Auflösung enthält, selbst wenn sie eine Differenzial-Gleichung irgend einer Art ist, so kann die Hydrodynamik und überhaupt die ganze Mechanik, die dieser Forderung in allen Fällen Genüge leistet, als eine geschlossene Wissenschaft betrachtet werden, während die weitere Entwicklung der von ihr aufgestellten Gleichungen der Analyse anheim fällt*“

und diese Aeusserung bezieht sich ausdrücklich auf die genannten *d'Alembert-Euler*-schen Ansatz-Gleichungen.

Ebenso enthält in Bezug auf dieselben Ansatz-Gleichungen die: „*Geschichte der inductiven Wissenschaften etc. Nach dem Englischen des W. Whewell, mit Anmerkungen von J. J. v. Littrow. 1840.*“ im Zweiten Theil, Seite 122 und 123 folgende wörtliche Aeusserung:

„*Man hat in ihr (nemlich in der Hydrodynamik) offenbar den höchsten Punkt der Wissenschaft erreicht, nemlich die allgemeinsten und zugleich einfachsten Gesetze, aus denen die äusseren Erscheinungen erklärt werden sollen, und es lässt sich nicht weiter zweifeln, dass diese höchsten Prinzipien, zu denen wir gelangt sind, der Wahrheit gemäss und den Phänomenen der Natur vollkommen angemessen sind. Und doch sind wir noch immer sehr weit davon entfernt, diese Prinzipien so anwenden zu können, dass sie die Beobachtungen oder die durch unsere Experimente erhaltenen Thatsachen vollkommen bestätigen oder erklären können.*“



Es besteht hiernach die Ansicht, dass die Theorie der Hydrodynamik in aller Vollständigkeit und in unbestreitbarer Richtigkeit und Zuverlässigkeit vorhanden und in den bekannten Differenzial-Ansatzgleichungen gegeben sei, und dass der Mangel an Uebereinstimmung zwischen den durch Rechnung gefundenen Resultaten und den aus der Erfahrung entnommenen positiven Thatsachen nur in dem Mangel an Geschick für die Anwendung jener theoretischen Elemente auf die Erscheinungen der Wirklichkeit seinen Grund habe. *Littrow* sagt in dieser Beziehung in *Gehler's physikalischem Wörterbuche* in der dritten Abtheilung des sechsten Bandes, Seite 1527 wörtlich:

„Wenn diese Gleichungen leichter zu integriren wären, so würde man mit ihrer Hilfe die Bewegung der Flüssigkeiten in allen gegebenen Fällen mit der grössten Genauigkeit vollständig bestimmen können. Aber sie sind unglücklicher Weise so schwer zu behandeln, dass man ihre Integrale bisher nur in einigen sehr beschränkten Fällen zu finden im Stande gewesen ist.“

Dass brauchbare und völlig genügende Auflösungen hydrodynamischer Probleme nur in äusserst geringer Zahl vorhanden sind, ist leider nur zu wahr. Nicht einmal die Bewegung tropfbarer Flüssigkeiten, bei welchen doch durch ihre Unzusammendrückbarkeit die Anzahl der in den bezüglichen Problemen vorkommenden veränderlichen Elemente um eines vermindert wird, sind wir hinreichend genau zu verfolgen im Stande. Die Modificationen in den Erscheinungen der Zusammenziehung des Strahls bei dem Ausfluss des Wassers aus Oeffnungen können weder in qualitativer noch in quantitativer Beziehung von dem Standpunkte der Theorie aus in ihrer Nothwendigkeit nachgewiesen oder für gegebene Umstände vorhergesagt werden, und die darüber aufgestellten Formeln und Sätze sind nichts, als ein Complex empirisch gefundener Regeln, an denen die eigentliche Theorie nur einen sehr dürftigen Antheil hat.

Noch übler stellt sich diess für die Bewegung luftförmiger Fluida. Der Widerstand, den letztere gegen feste Körper äussern, wenn diese sich in ihnen bewegen und ihre Theilchen in Bewegung setzen und verdrängen, hat bisher noch weniger sich dem theoretischen Calcül fügen wollen und



selbst diejenigen empirischen Regeln, die man auf ziemlich gewaltsamem Wege sich zu verschaffen gewusst hat, lassen in einzelnen Fällen gänzlich im Stich. Diess namentlich für den Fall ausführlich nachzuweisen, wenn der in dem widerstehendem Mittel bewegte Körper neben seiner fortschreitenden Bewegung noch eine Umdrehungs-Bewegung hat, ist in derjenigen Abhandlung versucht worden, für welche die vorliegende, dem Titel zufolge, sich als unmittelbare Fortsetzung ankündigt.

Der einzige mir bekannt gewordene Versuch, eines der hier einschlagenden Probleme in aller theoretischen Strenge zu behandeln und durchzuführen, ist von *Poisson* gemacht worden in seinem *Mémoire sur les mouvements simultanés du pendule et de l'air environnant* im elften Bande der Memoiren der Pariser Academie. Allein die Erleichterungen für den Calcül, die sich *Poisson* durch Beschränkung der Bedingungen des Problems hiebei zu verschaffen gewusst hat, sind nur in seltenen Fällen zulässig und fallen gänzlich fort, sobald von Bewegungen die Rede ist, die mit Geschwindigkeiten von irgend einiger Erheblichkeit vor sich gehen.

Hiernach sollte man nun glauben, dass das nächste Erforderniss nur in einer hinreichenden Ausbildung des Integral-Calcüls bestände, dergestalt, dass Methoden aufgestellt würden, mittelst deren man im Stande wäre, die mehrbesprochenen *d'Alembert-Euler-schen* Partial-Differenzial-Ansatzgleichungen in angemessener Form zu integrieren und dabei die erforderlichen und den Umständen entsprechenden willkürlichen Functionen und sonstigen Bedingungen gehörig zu berücksichtigen. Wären diese Methoden vorhanden, dann würde man die bezüglichlichen Probleme zu lösen und die hiebei hervorgehenden theoretischen Resultate mit direct beobachteten positiven Thatsachen zu vergleichen haben. Die Ergebnisse solcher Vergleiche würden dann ohne Weiteres zeigen, ob die vorhin angeführten Ausprüche

„— dass die *Hydrodynamik* in Folge der *d'Alembertschen* Ansatzgleichungen als eine **geschlossene Wissenschaft** betrachtet werden könne,“

so wie

„— dass die in jenen Gleichungen enthaltenen **Prinzipien** die



„höchsten und dass sie der Wahrheit gemäss und den Phänomenen der Natur vollkommen angemessen seien,“ auch wirklich gehörig begründet sind.

Inzwischen ist auf einem sehr nahe angrenzenden Gebiete, nemlich auf dem der Hydrostatik ein Ereigniss eingetreten, dessen nähere Betrachtung die Unzulänglichkeit der *d'Alembertschen hydrodynamischen Ansatzgleichungen* ohne Weiteres darthut.

Die Erscheinungen der Capillarität als eine scheinbare Abnormität gegen die bis dahin bekannten Naturgesetze hatten schon in früheren Zeiten die Aufmerksamkeit auf sich gezogen, ohne dass man im Stande war, sich genügende Rechenschaft darüber zu geben, bis *Musschenbroek* 1753 die Ansicht aussprach, dass die Ursache dieser Erscheinungen in einer Anziehung der Theile der Röhre auf die Theile der Flüssigkeit zu suchen sei. Diese Ansicht wurde allmählig weiter ausgebildet, sodann dahin erweitert, dass hiebei nicht allein eine Anziehung (und zwar eine nur in unmessbar kleiner Entfernung wirksame Anziehung) der einzelnen Theilchen der Röhre auf die Theilchen der Flüssigkeit, sondern auch eine eben solche gegenseitige Anziehung zwischen den Theilchen der Flüssigkeit unter sich angenommen werden müsse, und endlich von *Laplace* einer ausführlichen mathematischen Theorie der Capillarität zum Grunde gelegt, welche in zwei Abhandlungen auseinandergesetzt ist, die sich im vierten Bande der *Mécanique céleste* befinden, und im Jahre 1805 bekannt wurden.

Indessen unterwarf *Poisson* die Theorie des *Laplace* einer ausführlichen Prüfung, wies nach, dass der von letzterem angenommene physikalische Grund zur vollständigen Erklärung der in Rede stehenden Phänomene keinesweges ausreiche und stellte in seiner *Nouvelle théorie de l'action capillaire. Paris 1831* eine andere Theorie auf, bei welcher er von einem anderen physikalischen Grunde, nemlich von einer Ansicht über die innere Constitution aller Körper ausgeht, die vorzüglich von *Laplace* selbst zuerst vollständig ausgebildet und in Gang gebracht worden, bei der Aufstellung seiner Capillaritätstheorie aber von ihm unbenutzt geblieben war.

Dieser Ansicht zufolge bestehen alle Körper aus einzelnen unendlich kleinen materiellen Theilchen, welche physisch nicht weiter theilbar sind, und



welche sich gegenseitig nicht unmittelbar berühren, sondern Zwischenräume zwischen sich haben, welche mit Wärmestoff angefüllt sind. Diese materiellen Theilchen, Molecüle genannt, äussern nicht allein gegenseitig auf die anderen Molecüle, sondern auch auf die Theile des zwischen ihnen liegenden Wärmestoffs eine (von der allgemeinen Attraction der Materie verschiedene) anziehende Kraft aus, welche ihr Zerstreuen in den unendlichen Raum verhindert, wogegen den Theilchen des Wärmestoffs eine repulsive Kraft beigelegt wird, welche die Molecüle auseinanderhält und eine bis zur unmittelbaren Berührung fortschreitende Annäherung verhütet. Je nachdem das Verhältniss zwischen beiden Kräften beschaffen ist, ist der Aggregatzustand des Körpers ein anderer, und zwar ist der Körper fest, tropfbar flüssig oder luftförmig, je nachdem bezüglich die Anziehungskraft der Molecüle grösser als die Repulsion des Wärmestoffs, dieser Repulsion gerade gleich, oder endlich kleiner als dieselbe ist. Der Ueberschuss der einen Kraft über die andere wird Molecularkraft genannt. Sie strebt, die Molecüle einander zu nähern oder sie von einander zu entfernen, jenachdem die anziehende Kraft der Molecüle grösser oder geringer als die repulsive Kraft des Wärmestoffs ist. Die Intensität der Molecularkraft nimmt ausserordentlich schnell ab, so wie die Entfernung der Molecüle zunimmt und wird ganz und gar unmerklich, sobald die Entfernung eine irgend merkliche Grösse erreicht.

Vermittelst dieser Ansicht und der darauf begründeten Theorie gelang es nun *Poisson* allerdings, den Erscheinungen der Wirklichkeit näher zu treten als *Laplace* diess vermocht hatte.

Ob aber *Poisson's* Theorie wirklich vollkommener war, als die von *Laplace*, darauf kommt es für unsere Angelegenheit zunächst gar nicht an, und eben so wenig darauf, ob die von *Poisson* seiner Theorie zum Grunde gelegte Ansicht über die innere Constitution der Körper in der Wahrheit begründet ist, und dem, was in der Natur wirklich statt hat, genau entspricht, oder ob es eine Hypothese ist, die im ferneren Verlauf der Zeit durch eine vollkommnere und angemessenere verdrängt und ersetzt zu werden die Aussicht hat. Hier kommt es einzig und allein darauf an:

„dass sich aus Veranlassung der Betrachtung der Capillaritätsercheinungen die unabweisbare Nothwendigkeit herausgestellt hat,



*vorauszusetzen, dass in den kleinsten Theilen der Materie Kräfte thätig sind, auf welche man bei der Aufstellung der bekannten Ansatzgleichungen der Statik, sowie der d'Alembert-Euler-schen Ansatzgleichungen der Hydrodynamik nicht gerechnet hatte.*

Sobald man sich mit diesem Gedanken vertraut gemacht hat, so leuchtet es ohne Weiteres ein, dass, im Widerspruch mit *Littrow's* Meinung

„die **Hydrodynamik keineswegs** in Folge der d'Alembertschen  
„Ansatzgleichungen als eine **geschlossene Wissenschaft betrach-**  
„tet werden könne,

sondern dass vielmehr andere und neue Ansatzgleichungen zu suchen sind, bei welchen auf jene besonderen Kräfte, wie sie aus der Constitution der Körper und aus der Zusammenstellung ihrer kleinsten Theile folgen, gehörige Rücksicht genommen ist.

Das ist freilich leichter gesagt, als gethan. Wir wissen von der Constitution der Körper und von ihren kleinsten Theilen a priori gar nichts und es sind diess Dinge, die sich einer unmittelbaren Beobachtung ganz zu entziehen scheinen. Unter diesen Umständen könnte es das Ansehen gewinnen, als ob die Möglichkeit eines ferneren Fortschreitens vorläufig ganz abgeschnitten und bis dahin hinausgeschoben wäre, bis wir uns auf irgend einem Wege jene mangelnde Kenntniss verschafft haben. Wäre dem wirklich so, so möchte an fernere Fortschritte wohl überhaupt nicht zu denken sein; glücklicherweise aber giebt es einen Weg, den die Physik insbesondere und die Naturwissenschaften im Allgemeinen oft mit dem besten Erfolge verfolgt haben, und welcher in den Fällen, wo die tiefer liegenden Ursachen der Erscheinungen nicht direct ermittelt und beobachtet werden können, sogar dazu dienen kann, diese selbst zu erforschen — es ist diess der Weg der Hypothesen.

Es kam also in diesem Falle, wie in anderen ähnlichen, darauf an, über das Wesen der unbekannten tiefer liegenden Ursachen eine oder mehrere Hypothesen aufzustellen, sodann für jede derselben, und indem man sie als Grundlage betrachtet, ein theoretisches Gebäude aufzuführen und die auf diese Weise erhaltenen wissenschaftlichen Sätze dadurch zu prüfen, dass man den Modus und das Qualitative der bezüglichen Naturerscheinungen



auf wissenschaftlichem Wege aus ihnen ableitet und die so erhaltenen Ergebnisse mit denjenigen vergleicht, welche die unmittelbare Beobachtung wirklicher Thatsachen ergiebt. Diejenige von allen Hypothesen, welche hiebei die meiste Uebereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung zeigt, ist die beste, und wenn gar eine Hypothese gefunden werden sollte, deren Endergebnisse bei fortgeführtem Vergleiche wieder und immer wieder mit den Erscheinungen der Wirklichkeit übereinstimmen, so werden wir zuletzt berechtigt sein, zu glauben, dass das von uns in der Natur vorausgesetzte Gesetz oder Verhältniss wirklich als solches existirt. Analoge Fälle bieten die physikalischen Theorien des Lichtes und der Wärme, bei welchen die Prüfung der beiden aufgestellten Hypothesen: der Emanation eines materiellen Licht- und eines materiellen Wärmestoffs, oder der Vibration eines Licht- und eines Wärme-Aethers noch im vollen Gange sind. Von einer absoluten Ueberzeugung und von unbezweifelter Gewissheit, wie sie bei den Wahrheiten der Mathematik statt findet, kann hiebei freilich keine Rede sein. Der Mathematiker construirt sich seine Grundbegriffe selbst und willkürlich, und verbindet sie nachher auf methodischem Wege, um so zu immer zusammengesetzteren Begriffen zu gelangen. Enthalten die Grundbegriffe und die Wege für ihre Verbindung nichts in sich Widersprechendes, so müssen die Endresultate eben so positiv wahr sein, als die Grundbegriffe es waren, und dass diese es seien, hat derjenige, der sie bildet, ganz in seiner Hand. Sie sind, sobald sie aus dieser Hand hervorgegangen sind, etwas unbezweifelt Vorhandenes. Ganz anders ist es mit den ersten Gründen der Naturerscheinungen. Diese Gründe selbst sind uns nie und nirgend unmittelbar gegeben, sondern wir nehmen nur ihre Resultate, die zuweilen ziemlich complicirten Naturerscheinungen wahr, und es bleibt uns für die Ermittlung der Ursachen, aus denen diese entsprungen, und der Kräfte, die dabei thätig gewesen sind, immer nur der Weg des *Vermuthens*, d. h. der *Hypothesen*.

Eine solche Hypothese kann, wie z. B. die einer allgemeinen Gravitation sich bei jeder neuen Prüfung, die man dafür unternimmt, als zulässig zeigen, ohne dass deshalb das betreffende Naturgesetz aufhörte, ein problematisches zu sein. Durch jede neue bestätigende Thatsache kann ein solches Naturgesetz



zwar eine bis ins Unendliche gesteigerte *Wahrscheinlichkeit* und somit eine *moralische* Gewissheit, niemals aber *absolute* Gewissheit erlangen.

Es ist eine nur ganz gewöhnliche Regel der Vorsicht, wenn man bei der Wahl der Hypothese, welche man zunächst zu prüfen beabsichtigt, nach einer möglichst einfachen und einer solchen sucht, welche sich den übrigen Erscheinungen, die mit den zu betrachtenden in näherem oder entfernterem Zusammenhange stehen, möglichst gut anschliesst. Wenn man von diesem Standpunkte aus die vorhin erörterte, von *Laplace* aufgestellte und von *Poisson* bei der Theorie der Capillarität benutzte Hypothese über die innere Constitution der Körper mit unpartheiischem Blicke betrachtet, so wird man nicht umhin können, ihr, wenigstens in Bezug auf die hier in Rede stehende Angelegenheit, seinen ganzen Beifall zu schenken. Wir sehen die Körper, wenn wir sie nach und nach immer mehr erwärmen, d. h. wenn wir immer mehr Wärme in sie hineinbringen, sich immer mehr ausdehnen, und sehen, wie sie dabei aus dem festen in den tropfbar flüssigen und aus diesem in den luftförmigen Zustand übergehen. Dagegen sehen wir die umgekehrte Folge der Aggregatzustände eintreten und, mit kaum erwähnenswerthen Ausnahmen, die Körper sich immer mehr zusammenziehen, wenn ihnen nach und nach immer mehr Wärme entzogen wird.

Mag man nun einen eigenen materiellen Wärmestoff als Ursache der Wärme annehmen, oder mag man sich statt dessen denken, dass die Aeusserungen der Wärme den Vibrationen eines Wärmeäthers entsprechen, immer wird man doch für das Prinzip der Wärme mit einem materiellen Körper zu thun haben. Da aber, den einfachsten Regeln des gesunden Menschenverstandes gemäss, an denjenigen Stellen, wo sich der materielle Wärmestoff, oder nach der andern Annahme der eben so materielle Wärmeäther befindet, nicht zu gleicher Zeit die materiellen Theile des erwärmten Körpers befinden können, während doch die Wärme durch den ganzen Körper hindurch als vertheilt angenommen wird, so bleibt gar nichts anderes übrig, als anzunehmen, dass die einzelnen Theile derjenigen Materie, welche das Wärmeprinzip enthält, zwischen die einzelnen Theile des erwärmten Körpers eindringen und sich daselbst lagern. Hiermit, und wenn man diesen Gedanken in aller Consequenz ausführt, ist aber sodann impli-



cit schon ausgesprochen, dass man sich den Körper aus gewissen, physisch weiterhin nicht mehr theilbaren und von einander abgesonderten kleinsten Theilen bestehend denkt, und es liegt durchaus nichts Unnatürliches und Gezwungenes in der Vorstellung, wenn man annimmt, dass die Vergrößerung des Volumens der Körper bei hinzutretender Wärme dadurch entstehe, dass letztere eine grössere gegenseitige Entfernung jener kleinsten Theile oder Molecüle bewirke. Die Annahme, dass diess mittelst einer repulsiven Kraft geschehe, welche der Wärme innewohnt, ist dann nur eine andere Ausdrucksform desselben Gedankens, in welche der Begriff der Causalität in einer solchen Weise mit aufgenommen ist, dass die in den alltäglichsten Erscheinungen wahrnehmbare thatsächliche Wirkung der Wärme von dem mathematischen Calcül erfasst werden kann.

Wenn man sich nun mit dem Gedanken vertraut gemacht hat, der Wärme eine repulsive Kraft zuzuschreiben, welche die Molecüle auseinanderhält, so fühlt man sich nothgedrungen zu der Vorstellung einer zweiten Kraft hingeführt, welche das unbegrenzte Auseinanderstieben der Molecüle verhindert und sie in solchen gegenseitigen Entfernungen von einander erhält, dass sie Körper von der Art bilden können, wie wir sie in der Natur wahrnehmen. Der Begriff einer gegenseitigen Anziehung, welche die materiellen Molecüle nicht allein untereinander, sondern auch auf den Wärmestoff oder nach der andern Annahme auf den Wärmeäther ausüben, ist dann wieder nur der formelle Ausdruck jenes Gedankens mit Rücksicht auf die mathematische Behandlung. Und wenn diese Anziehung als eine von der allgemeinen Gravitation verschiedene betrachtet, und angenommen wird, dass ihre Wirksamkeit in Bezug auf wachsende Entfernung in überaus grösserem Maasse abnimmt, als jene, und dass sie nur in überaus geringer Entfernung wirksam sei, so schliesst sich diese Vorstellung wiederum positiven Thatsachen an, die wir in den Erscheinungen der Adhäsion und der chemischen Thätigkeit jeden Augenblick sinnlich wahrzunehmen im Stande sind.

Je mehr man sich in die *Laplacesche* Hypothese über die innere Constitution der Körper hineindenkt, um so mehr wird man sich veranlasst finden, ihre *hohe Einfachheit* bei so *ausgedehnter Anwendbarkeit* zu bewundern, gewiss die empfehlenswertheste Eigenschaft, welche eine Hypothese haben kann.



Die Betrachtung der Körperwelt bietet Ausdehnungen und Zusammenziehungen dar, also einen Gegensatz der Erscheinungen. Was kann natürlicher sein, als der Gedanke, letztere als die Wirkungen von Ursachen anzusehen, deren Wesen ebenfalls einen entsprechenden Gegensatz darbietet. Die Namen: *anziehende* und *repulsive* Kraft sind dann eben nur Namen, bei denen es auf möglichst verständliche Bezeichnung abgesehen ist. Dass endlich materielle Elemente vorhanden sein müssen, welche die Träger dieser Kräfte sind, versteht sich von selbst, und es ist nur in Uebereinstimmung mit den alltäglichsten Erscheinungen, wenn die Rolle der repulsiven Kraft dem Wärmeprinzip, die der anziehenden Kraft den materiellen kleinsten Theilen des eigentlichen Körpers zugetheilt wird. Verbindet man hiermit noch die Betrachtung, dass jene Hypothese sich auch für die Erklärung der verschiedenen Aggregatzustände der Körper, so wie der Elasticität, des cristallinischen oder amorphen Zustandes u. s. w. mit Leichtigkeit fügt, so sieht man kaum ein, wie es möglich sein möchte, eine Hypothese aufzufinden, welche einfacher oder tiefer eingreifend sein könnte.

Wenn die hier in Rede stehende Hypothese mit den Elementen und Folgerungen anderer Theorien, z. B. mit der *Ampèreschen* Wärmetheorie nicht ganz vereinbar ist, so folgt daraus für ihren eigenen Werth oder Unwerth noch gar nichts, da die absolute Richtigkeit der letzteren noch lange nicht ausgemacht ist und der mögliche Irrthum eben so gut auf dieser wie auf jener Seite sein kann. Das letztere Bedenken verschwindet jedoch grösstentheils, wenn es sich nur um die Rücksicht auf die Ansatzgleichungen der Hydrodynamik oder noch allgemeiner, wenn es sich um die allgemeinsten Differenzial-Ansatzgleichungen für das Gleichgewicht und die Bewegung derjenigen Körper handelt, welche *Poisson* in seiner, hier in der Uebersetzung dargebotenen Abhandlung zum Gegenstande der Betrachtung gemacht hat.

*Poisson* hat bei der Herleitung der bezüglichen Ansatzgleichungen und für die Berücksichtigung der dabei wirksamen Molecularkräfte ganz die im Vorigen erörterte Hypothese über die innere Constitution aller materiellen Körper zum Grunde gelegt. Er hat sich dabei auf die Darlegung und Aufstellung der ganz allgemeinsten Differenzial-Ansatz-Gleichungen beschränkt, und ist weder auf die Methoden für die Integration derselben im Allgemeinen



noch auf Anwendungen für specielle Arten von Naturerscheinungen ins Besondere eingegangen. Diess bleibt mithin, da *Poisson* inzwischen mit Tode abgegangen ist, Sache derjenigen, welche durch specielle Bedürfnisse darauf geführt werden.

Hiebei findet jedoch in sofern eine Ausnahme statt, als die schon früher erwähnte: *Nouvelle théorie de l'action capillaire. Paris 1831* von *Poisson* ganz auf die so eben besprochenen Ansichten begründet ist. Und da gerade dieses Werk einigen Physikern Veranlassung zu bemerkenswerthen Aussprüchen gegeben hat, welche sich auf den Entwicklungsgang der Physik überhaupt beziehen, so giebt mir diess eine erwünschte Gelegenheit, meine persönliche Ansicht hierüber noch weiter zu erörtern.

Herr Professor *H. F. Link* giebt in den *Annalen der Physik und Chemie von Poggendorf* (25ster Band, der ganzen Folge 101ster, Seite 270 u. f. und 27ster Band, der ganzen Folge 103ter, Seite 193 u. f.) einen Auszug aus der vorgenannten Capillaritätstheorie von *Poisson*, und fügt diesem Auszuge eine *Schlussbemerkung*, so wie einen *Nachtrag* bei, welcher zunächst eine *Antwort auf eine Beschuldigung des Herrn Prof. Link von Parrot* und sodann eine *Erwiderung von H. F. Link* enthält.

Hierin finden sich nun wörtlich folgende Aeusserungen vor:

von Herrn Prof. *Link*:

„Das Resultat dieser Untersuchungen kann für die Physik nicht  
 „erfreulich sein. Ein Mathematiker vom ersten Range, **Laplace**,  
 „übersieht bei denselben wesentliche Bedingungen, die, wenn man  
 „darauf Rücksicht nimmt, seine Formeln in einem Widerspruch  
 „mit aller Erfahrung setzen. *Poisson* zeigt dieses, und um das  
 „Verfahren, welches beide Mathematiker gewählt haben, um die  
 „Theorie überhaupt zu retten, nimmt er zu einer Hypothese seine  
 „Zuflucht,“

ferner

„Wenn auch diese Hypothese alle Erscheinungen genügend erklärte,  
 „so würde doch Niemand behaupten können, dass es nicht noch  
 „manche andre Hypothesen von der innern Constitution der Ma-  
 „terie geben könne, welche ebensowohl als diese jene Aufgaben zu



„lösen im Stande wären. Der menschliche Scharfsinn ist uner-  
schöpflich in dieser Hinsicht. Aber der Physiker kann hierdurch  
nicht befriedigt sein. Er will, dass sich die Richtigkeit seiner  
Erklärung oder seiner Erklärungsgründe in der Natur nachwei-  
sen lassen. Denn nie kann ein Molecül und dessen Zusammen-  
setzung in der Natur nachgewiesen werden. — — Die Vorwürfe,  
welche die französischen Physiker nicht ganz mit Unrecht unserer  
Naturphilosophie machen, kann man mit demselben Rechte ihrer  
mathematischen Physik zurückgeben.“

Die Aeusserung des Herrn Parrot lautet wörtlich folgendergestalt:  
„Ich denke aber, dass an dem Vorliegenden genug sei, um meinen  
Zweck zu erreichen, der nicht darin besteht, den Ruhm des gros-  
sen Analytikers herabzusetzen, sondern streng zu beweisen, wie  
vielfältig man irren kann, und wirklich irrt, wenn man nicht  
jeder Rechnung nur gehörig documentirte physikalische Sätze zum  
Grunde legt, sondern von gewissen allgemeinen mechanischen  
Sätzen ausgeht, deren Anwendbarkeit im vorliegenden Falle pro-  
blematisch ist, und dann glaubt, man brauche nur noch mit gros-  
sem Scharfsinn zu rechnen. Diese verkehrte Methode, ein  
**Missbrauch einer edlen Wissenschaft**, nenne ich die Na-  
turphilosophie, in dem Sinne wie die Naturphilosophie in den  
letzten Zeiten getrieben worden ist, und hie und da noch getrieben  
wird. Jene mathematische Naturphilosophie der französischen  
Schule ist in sofern schlimmer als die philosophische der Deutschen,  
als sie mit dem Apparate der mathematischen Analysis, und also  
mit dem prunkvollen Scheine der Evidenz auftritt, und daher viel  
schwerer ad absurdum zu führen ist als diese.“

Diese Aeusserungen enthalten, mit dem mildesten Ausdruck bezeichnet,  
arge Missverständnisse.

Zuvörderst sprechen sie den Gedanken aus, dass es zweckwidrig und  
mithin tadelnswerth sei, bei den Bestrebungen für die Weiterführung einer  
physikalischen Erörterung von einem nur hypothetischen Prinzip auszugehen  
und darauf ein wissenschaftliches Gebäude aufzuführen. Es wird die An-



sicht aufgestellt, dass man gar nicht eher zu rechnen (d. h. in diesem Falle: mathematische Entwicklungen aufzustellen) anfangen solle, bis man der Rechnung „*nur gehörig documentirte physikalische Sätze zum Grunde legen kann*“. Eine solche Ansicht scheint mir ganz und gar irrig zu sein, weil sie von der Voraussetzung ausgeht, dass jedes physikalische Prinzip einer **directen Ermittlung, Beobachtung und Constatirung fähig sei, unabhängig von der Berücksichtigung derjenigen Erscheinungen, für deren Erklärung es dienen soll.** So lange es Naturwissenschaften gegeben hat, hat es für die Ermittlung der näheren oder entfernteren Ursachen der beobachteten Erscheinungen keinen anderen Weg gegeben, und so lange Naturwissenschaften werden betrieben werden, wird es für den genannten Zweck keinen anderen Weg geben, als den, für das Wesen jener Ursachen Hypothesen aufzustellen und deren Richtigkeit an den Erscheinungen der Wirklichkeit selbst zu prüfen. Ist es möglich, solche Erscheinungen aufzufinden, deren Wesen und deren practische Herbeiführung einfach genug ist, um jene Prüfung *direct* und ohne Einnischung derjenigen verwickelteren Phänomene, auf deren Erklärung es eigentlich zuletzt abgesehen ist, bewirken zu können, so ist diess um desto besser. Aber voraussetzen, *dass diess immer möglich sein müsse*, ist offenbar zu weit gegangen. Wer möchte es in Abrede stellen, dass ein so günstiges Verhältniss immer seltener eintreten wird, je mehr die Naturwissenschaften selbst vorwärts schreiten, und je mehr wir mithin genöthigt werden, von den näheren Ursachen der sinnlichen Erscheinungen zu den entfernteren aufzusteigen. Der wirkliche Hergang beweiset auch, dass die besten Physiker dieser Ansicht thatsächlich folgen. Für die Erscheinungen des Lichtes und der Wärme z. B. sind für jedes dieser beiden Dinge zwei verschiedene und von einander ganz abweichende Theorien vorhanden, die jede für sich ein umfangreiches wissenschaftliches Gebäude bilden, ohne dass die physikalischen Grundbegriffe, auf denen sie erbaut sind, in Bezug auf ihre Realität vorher *direct* nachgewiesen wären, oder *direct* hätten nachgewiesen werden können. Denn wie wollte man es anfangen, die wirkliche Existenz eines materiellen Lichtstoffs und eines materiellen Wärmestoffs oder — nach den anderen Theorien — die wirkliche Existenz eines Lichtäthers, und eines Wärmeäthers und endlich die wirkliche



Existenz der Schwingungen eines solchen Aethers *direct* dergestalt nachzuweisen, dass die Kenntniss derselben solche *gehörig documentirte physikalische Sätze* ergäbe, auf die man die bezüglichen Theorien begründen könnte. Alles diess hat die Physiker nicht abgehalten, einerseits materielle Licht- und Wärme-Stoffe, andererseits Lichtäther und Wärmeäther und deren Schwingungen *hypothetisch* und mit dem vollen Bewusstsein ihrer **vorläufigen Unerwiesenheit** anzunehmen, und Theorien darauf zu erbauen. Der Sinn der darauf verwendeten Bemühungen ist kein anderer gewesen und konnte kein anderer sein, als der, zu ermitteln, wie gewisse Erscheinungen der Wirklichkeit unter gegebenen und bekannten Umständen nach Qualität und Quantität wohl ausfallen würden, je nachdem die eine oder die andere physikalische Grundansicht (und mithin die auf ihr erbaute Theorie) die richtige ist. Alle jene Bemühungen konnten nur mit dem Vorbehalt unternommen werden, **zuletzt** diejenige Theorie bis auf Weiteres als richtig anzuerkennen, welche mit der Wirklichkeit am Besten übereinstimmt oder auch wohl, wenn eine hinreichende Uebereinstimmung auf keinem der eingeschlagenen Wege zu erzielen war, beide Theorien zu verwerfen und nach einer dritten und besseren zu suchen.

In einem ganz ähnlichen Falle befand sich die Capillaritäts - Theorie. *Laplace* nahm hypothetisch an, dass hiebei nur die gegenseitige Anziehung der kleinsten materiellen Theile der Röhre und der Flüssigkeit, und zwar eine von den Physikern bereits zugestandene von der allgemeinen Gravitation verschiedene, nur in unmerklichen Entfernungen wirksame, Anziehung thätig sei, und führte auf diesem Grunde seine Theorie auf. *Poisson* wies nach, dass die aus einer solchen Theorie abgeleiteten Resultate mit der Erfahrung im Widerspruch seien, folgerte daraus, dass der der Theorie des *Laplace* untergelegte physikalische Grund nicht ausreichend sei, stellte seinerseits einen anderen physikalischen Grund als hypothetisch auf und entwickelte eine dem letzteren entsprechende andere Theorie, von der sich dann bei der Prüfung zeigte, dass sie mit der Erfahrung viel besser übereinstimmte. Ob *Laplace's* einfachere Hypothese, welche nur auf Anziehung der kleinsten Körpertheile begründet war, oder *Poisson's* zusammengesetztere Hypothese, bei welcher noch eine repulsive Kraft zu Hilfe genommen wird,



zulässig und welches von ihnen die bessere wäre, liess sich eben erst beurtheilen, wenn für jede dieser beiden Hypothesen eine darauf begründete Theorie aufgestellt war, deren Endergebnisse an der Erfahrung in Bezug auf ihre Richtigkeit geprüft werden konnten.

Hiernach leuchtet denn ein, dass der dem *Laplace* von Herrn *Parrot* gemachte Vorwurf, dass jener bei der Aufstellung seiner Theorie sich habe „eine verkehrte Methode, einen Missbrauch einer edlen Wissenschaft

zu Schulden kommen lassen, gänzlich unbegründet ist, und nur von einem völligen Verkennen des eigentlichen Sachverhältnisses und des in den Naturwissenschaften einzuschlagenden Weges zeugt. Obgleich *Laplace's* Capillaritäts-Theorie nicht mit der Erfahrung übereinstimmt, so ist die darauf verwendete Arbeit nichts weniger als verloren oder vergeblich. Sie hat vielmehr zu der positiven und auf strengen wissenschaftlichen Nachweis begründeten Ueberzeugung geführt, dass für die gegenseitige Einwirkung der kleinsten Körpertheilchen auf einander die alleinige Annahme einer gegenseitigen Anziehung (wie sie vorhin erörtert worden ist) nicht ausreiche, dass vielmehr *Poisson's* Hinzuziehen einer zweiten Kraft, der Repulsion des Wärmestoffs, eine grössere Annäherung an die Erfahrung ergebe. Eine solche Kenntniss würde kaum auf einem anderen Wege als demjenigen, welchen *Laplace* und *Poisson* eingeschlagen haben, zu erlangen gewesen sein, und gewiss nicht in so überzeugender Weise. Unter diesen Umständen wird man die Aeusserung des Herrn Professor Link

„Das Resultat dieser Untersuchung kann für die Physik nicht erfreulich sein,

zu würdigen wissen, und ebenso dasjenige, wo Herr *Parrot* von dem „Apparate der mathematischen Analysis und dem prunkvollen Scheine der Evidenz“

spricht. Die Evidenz, welche den mathematischen Entwicklungen natürlich nicht fehlen darf, wenn die Anwendung der mathematischen Analysis überhaupt einen Sinn haben soll, ist nicht blos zum Schein da, und will sich auch nicht den Schein geben, als ob sie ihre Wirksamkeit unmittelbar auf die Richtigkeit der zum Grunde gelegten Hypothese oder auf die Richtigkeit der



errechneten Resultate erstrecken wolle. Ob jene Hypothese eine richtige sei und ob die Resultate der Rechnung mit der Erfahrung übereinstimmen werden, das geht die mathematische Analysis nichts an. Die Richtigkeit ihrer Entwicklungen muss völlig *evident* sein, auch wenn jene Hypothese grundfalsch ist und die Ergebnisse der Rechnungen ganz und gar der Erfahrung widersprechen. Eben jene Evidenz macht es überhaupt erst möglich und zulässig, von der Uebereinstimmung oder Nichtübereinstimmung zwischen den Rechnungs-Resultaten und der Erfahrung auf die *Zulässigkeit* oder Unzulässigkeit der zum Grunde gelegten Hypothese zu schliessen.

Dass durch die erwähnte Uebereinstimmung, wenn sie vorhanden sein sollte, eben nur die *Zulässigkeit* und noch lange nicht die absolute Richtigkeit der gewählten Hypothese begründet wird, ist schon früher besprochen worden.

Ich würde mich nicht so ausführlich auf diese Widerlegung eingelassen haben, wenn nicht der Umstand, dass die hier in der Uebersetzung dargebotene Arbeit *Poisson's* augenscheinlich so wenig bekannt ist, mich zu der Vermuthung berechtigte, dass ähnliche Ansichten, wie die vorhin bestrittenen, vielleicht von anderen Physikern getheilt werden. Sollte diess der Fall sein, so würde dadurch die Aussicht, dem Problem von der

#### Bewegung der Artillerie - Geschosse im widerstehenden Mittel mit Rücksicht auf Umdrehung

kräftige Mitarbeiter zu gewinnen, bedeutend beeinträchtigt werden. Denn es handelt sich für dieses Problem wieder darum, einen mathematischen Bau von mächtigem Umfange auf dem Grunde einer Hypothese aufzuführen, und so viel Wahrscheinlichkeit es auch für sich hat, dass jene Hypothese — die in dem Vorigen erörterte *Laplace - Poisson*-sche in Betreff der inneren Constitution der Körper — sich bewähren werde, so ist doch die Gewissheit dafür keinesweges vorhanden, und es kann möglicherweise der Fall eintreten, dass man viel Arbeit vergeblich gehabt hat. Das ist aber nicht zu vermeiden.

Die Bemühungen für die Förderung des so eben bezeichneten artilleristischen Problems waren der im Eingange erwähnte specielle Zweck, welcher mir Veranlassung gab, mich mit der vorliegenden *Poissonschen* Abhandlung bekannt zu machen. Nachdem ich mich überzeugt hatte, dass alle bisher auf-



gestellten, auf mehr oder minder empirischem Wege gefundenen Regeln für die Berücksichtigung des Luftwiderstandes bei der Bewegung der Artilleriegeschosse ihre Anwendbarkeit verlieren, sobald jene Geschosse neben ihrer fortschreitenden Bewegung noch eine Umdrehungs-Bewegung haben, war Nichts natürlicher, als dass sich mir der Wunsch aufdrängte, mich darüber aufzuklären, welcher Weg denn eigentlich einzuschlagen sei, um eine dem Wesen der Sache entsprechende Behandlungsweise für das in Rede stehende Problem aufzufinden. Als ich jedoch zu diesem Behuf die mir zugängigen bezüglichen Werke durchmusterte und nach Fingerzeigen suchte, welche mich auf den rechten Weg führen könnten, fand ich nur in den *Poissonschen* Werken solche Anleitungen, welche in bestimmten und klaren Aussprüchen dasjenige angeben, worauf es ankommt. Es sind hiebei hauptsächlich drei Punkte zu unterscheiden, welche ich nach und nach erörtern will, nemlich: das physikalische Grundprinzip, dann der mathematische Ansatz des Problems und endlich die Integration der Ansatzgleichungen. Drei inhaltschwere Dinge.

#### A. Das physikalische Grundprinzip.

Die *d'Alembertschen* Differenzial-Ansatzgleichungen aller hydrodynamischen Probleme wurden gefunden, indem man sich zwei gleich willkürliche Voraussetzungen erlaubte, nemlich einerseits, dass auch die Bewegungen aller einzelnen Theile einer Flüssigkeit unter denselben allgemeinen Gesetzen enthalten sein müssen, nach welchen wir die Bewegungen der festen Körper vor sich gehen sehen, und zweitens, dass die in den *hydrostatischen* Erscheinungen bemerkte Eigenschaft, wonach der von jedem Partikelchen eines Fluidums auf die benachbarten Partikelchen ausgeübte Druck *nach allen Richtungen hin gleich ist*, ohne Weiteres auch für die *hydrodynamischen* Erscheinungen giltig sei. Selbst *Laplace* folgt dieser Ansicht bei der Aufstellung der hydrodynamischen Ansatzgleichungen in der *mécanique céleste*. Es scheint, dass *Poisson* der erste gewesen ist, der es mit hinreichender Bestimmtheit ausgesprochen hat, dass die genannten Voraussetzungen als solche an sich willkürlich sind, und dass sie der Bestätigung bedürfen, wenn man sicher sein



soll, dass ihre Anwendung nicht zu Irrthümern führt. Derselbe legte der Pariser Academie der Wissenschaften zwei Abhandlungen vor, die eine über das Gleichgewicht und die Bewegung elastischer fester Körper, die andere über das Gleichgewicht der Fluida. In beiden hatte er die im Vorigen mehrfach erörterte *Laplacesche* Hypothese über die innere Constitution der Körper zum Grunde gelegt und wies nach, dass in dem Falle der Giltigkeit dieser Hypothese das Vorhandensein eines gleichen Druckes nach allen Richtungen in den *hydrostatischen* Erscheinungen der Fluiden, welches man bis dahin nur als ein aus der Erfahrung gegebenes empirisches Element betrachtet hatte, auch theorethisch begründet sei. Am 12. October 1829 endlich legte er der Pariser Academie der Wissenschaften die hier in der Uebersetzung dargebotene Abhandlung vor, in welcher er die Gegenstände der vorhin genannten beiden Abhandlungen noch einmal aufgenommen, demnächst die Betrachtung der *Bewegung der Fluida* hinzugefügt, und alle diese Untersuchungen im Zusammenhange und unter Zugrundelegung der mehrgenannten *Laplaceschen* Hypothese durchgeführt hatte. Dabei fand sich unter vielen anderen Resultaten eins, was für den vorliegenden Fall überaus wichtig ist, nemlich:

**dass — die Richtigkeit der mehrgedachten Laplaceschen Hypothese vorausgesetzt — die für hydrostatische Erscheinungen ganz richtige Annahme eines gleichen Drucks nach allen Richtungen, wie sie den d'Alembertschen Ansatzgleichungen für die Hydrodynamik zum Grunde liegt, in Bezug auf letzten unrichtig und mithin unzulässig ist.**

So wie eine solche Behauptung einmal ausgesprochen und aufgefasst worden ist, fällt es wie Schuppen von den Augen. Nicht darum handelt es sich hiebei zunächst, ob die Behauptung von dem Nichtvorhandensein des gleichen Drucks in dem Falle der in Bewegung begriffenen Fluiden an sich richtig oder unrichtig ist, sondern zuvörderst und hauptsächlich darum, dass auf die *Willkühr* der Grundideen aufmerksam gemacht ist, auf welche sich die bisherigen Ansatzgleichungen stützen, und dass die Nothwendigkeit hervorgehoben ist, die Zulässigkeit jener Grundideen *nachzuweisen*. Es scheint, dass es kaum möglich sein möchte, einen solchen Nachweis überhaupt zu führen, ohne auf Vorstellungen von der inneren Constitution der Materie einzugehen. Es ist in



dem Vorigen ausführlich besprochen, dass Vorstellungen dieser Art nicht das Ergebniss *directer* Untersuchungen und nicht Sache der *absoluten Ueberzeugung* sein können, sondern dass dafür — so weit ich diess zu übersehen vermag — nur der Weg der Hypothesen einerseits und der Prüfung ihrer Endresultate an der Erfahrung andererseits denkbar ist. *Poisson* hatte die Genugthuung, die von ihm angenommene Zulässigkeit der *Laplaceschen* Hypothese über die innere Constitution der Körper bei einem Problem — der Capillaritätstheorie — bestätigt zu sehen, an welchem *Laplace* selbst, der von einer andern Hypothese ausging, gescheitert war. Es ist mithin, insofern die ältere Theorie im Stiche lässt, aller Grund vorhanden, jene Hypothese wenigstens versuchsweise auch bei den hydrodynamischen Problemen weiter zu verfolgen, immer unter dem ausdrücklichen Vorbehalt, dass wir zunächst das Bedürfniss befriedigt zu sehen wünschen, die Ergebnisse der Theorie mit der Erfahrung in Einklang zu bringen, dass wir es jedoch selbst in dem Falle der erreichten Uebereinstimmung dahin gestellt sein lassen, ob die Hypothese, über welcher das ganze theoretische Gebäude erbaut ist, bloss zulässig oder dem Wesen der Natur wirklich entsprechend ist, und dass wir bereit sind, auf eine andere und vollkommnere Hypothese einzugehen, sobald eine solche im Verlauf der Zeit aufgefunden werden sollte.

### **B. Der mathematische Ansatz des Problems.**

*Poisson* spricht es wiederholt aus, dass die bisherige Theorie des Luftwiderstandes noch sehr unvollkommen sei, weil sie von ziemlich gewaltsamen Voraussetzungen ausgeht. Um das Gesetz des Widerstandes, welchen ein Körper bei der Bewegung in einem Fluidum erleidet, direct und ohne irgend eine willkürliche Eimischung fremdartiger Ideen zu ermitteln, müsste man nach seiner Meinung (siehe *Recherches sur le mouvement des projectiles dans l'air. Paris 1839, Seite 2*) die Bewegung des Körpers und die Bewegung, welche derselbe dem Fluidum mittheilt, gleichzeitig in Erwägung ziehen und demnächst ausser dem Druck, den das Fluidum in Folge dieser Bewegungen in jedem Punkte der Oberfläche des Körpers in normaler Richtung auf letztere ausübt, auch noch eine tangen-



tielle Kraft in Rechnung stellen, welche von der Reibung der Oberfläche des Körpers an denjenigen Theilchen des Fluidums herrührt, die mit jener in unmittelbare Berührung kommen. *Poisson* weist dabei auf seine *Abhandlung über die gleichzeitigen Bewegungen eines Pendels und der dasselbe umgebenden Luft* in dem XIten Bande der Memoiren der Pariser Academie der Wissenschaften als Beispiel hin und verspricht schliesslich, in der Folge, wenn es ihm möglich werden sollte, die Aufstellung einer Theorie des Widerstandes, welchen die Luft einem in ihr sich bewegendem Körper entgegensetzt, unter Berücksichtigung des von ihm angedeuteten Gesichtspunktes zu versuchen. Für den Augenblick folgt er in dem oben angegebenen Werke (*recherches etc.*) der Newtonschen Theorie, indem er dieselbe für den vorgesetzten Zweck für ausreichend hält. Dass diese Voraussetzung sich nicht bestätigt, habe ich, wie schon erwähnt, in derjenigen Abhandlung nachzuweisen gesucht, welche der vorliegenden unmittelbar vorangeht.

*Poisson* ist mit Tode abgegangen, ehe er dem vorbezeichneten Versprechen hatte Genüge leisten können und es ist diess um so mehr zu beklagen, als es wohl kaum einem Zweifel unterliegen dürfte, dass er selbst die Lösung des in Rede stehenden Problems keineswegs für leicht gehalten hat, und als mithin seine Behandlungsweise desselben unfehlbar ein unschätzbares Mittel der Belehrung und Anleitung für diejenigen gewesen sein würde, welche nach ihm Veranlassung gefunden hätten, sich mit diesem Gegenstande zu beschäftigen. Um so mehr werden letztere auf Nachsicht rechnen müssen.

Der mathematische Ansatz für das Problem, welches sich auf die Bewegung eines im widerstehenden Mittel, mit oder ohne Umdrehung, fortschreitenden Geschosses bezieht, besteht aus folgenden wohl unterschiedenen Theilen, dergestalt, dass letztere für die Vollständigkeit des Ansatzes durchaus erforderlich, aber, so wie sie hier aufgeführt werden, auch völlig ausreichend sind.

a. *Die Differenzial-Ansatz-Gleichungen für die Bewegung der einzelnen Partikelchen des Fluidums, insofern letztere nicht im Bereich der Molecular-Wirkungssphäre der Oberfläche des Geschosses sind.*



Es sind hiebei, nach Seite 166 der *Poisson'schen* Abhandlung zwei verschiedene Fälle zu unterscheiden.

Entweder die Bewegungen der Luftmolecüle sind so langsam, dass sich durch die Strahlung in jedem Augenblicke diejenige Temperatur herstellt, welche stattfinden würde, wenn sie in Ruhe wären und die Dichtigkeit diejenige wäre, welche in dem Augenblicke wirklich vorhanden ist. Dann ist der Ansatz für die Bewegungen der Luftmolecüle in den Gleichungen (8), (10) und (15), auf den Seiten 160, 163 und 166 enthalten.

Oder aber, es können die Vibrationen der Molecüle des Fluidums und mithin auch die Verdichtungen und Verdünnungen, welche dasselbe begleiten, so schnell sein, dass während ihrer Dauer jeder Theil des Fluidums nur einen unmerklichen Verlust an Wärme erleidet, wie man diess z. B. in Betreff derjenigen Bewegungen der Luft voraussetzt, welche den Schall erzeugen. In diesem Falle ist der in Rede stehende Ansatz entweder in den Gleichungen (8), (10) und der empirischen Formel (16) auf den Seiten 160, 163 und 167, oder, wenn man über den Ausdruck für den Luftdruck in Function der Luftdichtigkeit bei gleicher Wärmemenge sich keine Hypothese erlauben will, in den Gleichungen (8), (10) und (17) auf den Seiten 160, 163 und 169 enthalten. Da nun in Betreff der Schnelligkeit der Vibrationen der Luftmolecüle bei der Bewegung der Artillerie-Geschosse der zweite der angeführten Fälle statt zu finden scheint, indem diese Bewegung meistens mit einem sehr wohl hörbaren Sausen oder Pfeifen verbunden ist, so scheint in diesem Falle das System von Gleichungen (8), (10) und (16), oder wenn man ganz streng zu Werke gehen will, das System der Gleichungen (8), (10) und (17) in Anwendung gebracht werden zu müssen.

Von diesen Gleichungen verdienen die Gleichungen (8) noch eine besondere Erörterung. Die ausführlichen Werthe der darin vorkommenden  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_3$ ,  $V_1$ , u. s. w. enthalten, wie man aus dem System von Gleichungen unter (7) auf Seite 158 sieht, die drei Symbole  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\beta'$ , welche sich auf die Molecular-Kräfte beziehen und unbekannte Functionen der in jedem Punkte des Fluidums stattfindenden Compression sind. Die Ermittlung dieser Functionen ist Sache angemessener Versuche. Setzt man sie Null, so gehen die Gleichungen (8) sofort in diejenigen drei *d'Alembert'schen* Ansatz-Gleichungen über, welche



aus der Vorstellung von dem Gleichgewicht zwischen den verlornen Kräften hergeleitet sind, dergestalt, dass die Gleichungen (8) aus zwei abgesonderten Theilen bestehen, von denen der eine giltig ist, sobald man von Molecular-Kräften abstrahirt, während der andere sich auf die Voraussetzung einer Mitwirkung der letzteren bezieht.

*b. Die Differenzial-Ansatz-Gleichungen für die Bewegung der einzelnen Partikelchen des Fluidums, insofern letztere wirklich im Bereich der Molecular-Wirkungssphäre der Oberfläche des Geschosses sich befinden.*

Diese sind unter (24) auf Seite 177 gegeben. Ausser dem schon früher vorgekommenen  $\beta$  enthalten diese Gleichungen zwei Symbole  $\mu$  und  $\nu$  für eben so viel hinzutretende neue Functionen der in jedem Punkte des Fluidums stattfindenden Compression, welche sich auf die Wirkung der Molecular-Kräfte beziehen und ebenfalls durch angemessene Versuche zu ermitteln sind. Da jedes Glied dieser Gleichungen mit einem der drei Symbole  $\beta$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  multiplicirt ist, so fallen diese Gleichungen ganz und gar fort, sobald man von den Molecular-Kräften abstrahirt.

*c. Die Gleichungen für die Drucke, welche in jedem beliebigen Punkte der Oberfläche des Geschosses stattfinden.*

Dieses sind die Gleichungen (23) auf Seite 176. Von den darin vorkommenden Symbolen  $\alpha'$  und  $\mu$ , welche sich auf die Molecular-Kräfte beziehen, ist  $\alpha'$  Function der früheren schon besprochenen ähnlichen Symbole. und  $\mu$  kommt selbst vor.  $\alpha'$  und  $\mu$  sind also nicht als neue Functionen zu betrachten. Abstrahirt man von den Molecular-Kräften und setzt zu dem Behufe die Symbole  $\alpha'$  und  $\mu$  gleich Null, so gehen diese Gleichungen (23) in diejenigen über, welche für den Fall der *d'Alembert'schen* Ansatz-Gleichungen gelten.

*d. Die Ansatz-Gleichungen für die fortschreitende Bewegung des Schwerpunktes des Geschosses, und wenn dasselbe eine Umdrehungsbewegung hat, auch für diese.*

Diese werden ganz nach den gewöhnlichen Regeln gebildet, ohne dass dabei explicite Symbole für die Molecularwirkung auftreten, sie geben daher zu keiner Erörterung Veranlassung.



*e. Eine Verbindungs-Gleichung zwischen den Gleichungen für die Bewegung der Luftmolecüle und den Gleichungen für die Bewegung des Geschosses.*

Diese Gleichung ist von der höchsten Wichtigkeit, sie bildet (man mag nun Molecular-Kräfte annehmen oder nicht) in jedem Falle den Schlussstein des Ganzen, und es hat damit folgende Bewandniss. Man denke sich zuvörderst, dass die Geschwindigkeit keines Punktes der Oberfläche des Geschosses in einer auf diese Oberfläche normalen Richtung grösser sei, als die Geschwindigkeit, mit der die Luft in den leeren Raum strömt, dann wird die Luft rings um das Geschoss herum während der Bewegung immerfort mit dessen Oberfläche in Berührung bleiben und es wird sich kein luftleerer Raum bilden. Denkt man sich sodann für irgend einen beliebigen Zeitpunkt die wahre Richtung der Bewegung des Mittelpunktes des kugelförmigen Geschosses (wir abstrahiren hier von complicirteren Formen) in einer geraden Linie dargestellt und legt man senkrecht zu dieser durch den Mittelpunkt eine unbegrenzte Ebene, so schneidet diese die Kugeloberfläche in einem grössten Kreise, welcher die Grenze der vorderen und der hinteren Kugelfläche ergiebt. An der vorderen Fläche häufen sich in Folge der Bewegung die Luftmolecüle und werden von der Kugeloberfläche vorwärts geschoben. Wäre letztere nicht fest genug, so würden sie dieselbe zerbrechen und in den inneren Raum der Kugel zu treten suchen. Die Festigkeit der Kugeloberfläche verhindert diess, und das Bestreben jedes Luftmolecüls, welches sich zu irgend einer Zeit mit einem Punkt der vorderen Fläche in Berührung findet, seine Entfernung zwischen diesem Punkte und dem Mittelpunkte zu verringern, wird aufgehoben, d. h. die Geschwindigkeit jedes solchen Luftmolecüls, zerlegt nach der Richtung des Halbmessers der Kugel, relativ in Bezug auf den Mittelpunkt derselben und gerichtet von Aussen nach Innen, ist Null. Dasselbe gilt augenscheinlich für die Luftmolecüle, welche mit der hintern Fläche in unmittelbarer Berührung stehen, und eben so auf der Grenze zwischen der vorderen und hinteren Fläche. Für alle Luftmolecüle, welche mit der Kugeloberfläche in unmittelbarer Berührung stehen, gilt mithin die Behauptung, dass die Geschwindigkeit derselben, zerlegt nach der Richtung des bezüglichen Kugelhalbmessers rela-



tiv in Bezug auf den Mittelpunkt der Kugel *und in der Richtung von Aussen nach Innen, gleich Null sei.* Diese Behauptung beschränkt sich, wie man sieht, nur auf die Geschwindigkeit nach der einen bestimmten Richtung und lässt die andern unerörtert. Die Form des mathematischen Ausdrucks für jene Beschränkung kann nach Umständen verschieden ausfallen. Sollten sich Punkte der Hinterfläche mit einer so grossen Geschwindigkeit bewegen, dass die Luft nicht mehr folgen kann, so wird sich hinter der Kugel ein luftleerer Raum bilden, dessen nähere Bestimmungen zu sehr verwickelten Untersuchungen führen wird, die sich an die Gleichungen (25) auf Seite 179 anknüpfen.

*f. Die Gleichungen für die gegebenen Anfangs- und Grenzzustände.*

Es sind diess die willkührlichen Functionen und die etwanigen Constanten, welche bei den Integrationen eingehen.

Im allgemeinsten Falle, wenn man nemlich eine Bewegung des Geschosses betrachtet, wobei die Bahn von doppelter Krümmung ist, liefert der Punkt a fünf, b drei, c drei, d sechs Ansatzgleichungen, so dass man sodann siebzehn Differenzial-Ansatzgleichungen hat, welche, unter Berücksichtigung der durch e gegebenen Beschränkung und der durch f gegebenen näheren Bestimmungen gleichzeitig zu integriren sind. Begnügt man sich mit der Betrachtung des Falles, wo die Umdrehungsaxe senkrecht auf der horizontalen Richtungsebene ist und sowohl der Schwerpunkt als der Mittelpunkt des Geschosses während der ganzen Bewegung immer in der genannten Ebene bleiben, so reducirt sich die Anzahl der gleichzeitig zu integrirenden Differenzial-Ansatzgleichungen auf vierzehn.

**C. Die Integration der Ansatzgleichungen.**

Dieselbe kann natürlich nicht in endlicher Gestalt erfolgen. Die dabei einzuschlagenden Wege sind dem Wesen nach dieselben, wie sie in derjenigen Abhandlung erörtert sind, von der die gegenwärtige die Fortsetzung bildet.



Ich muss es nun dahingestellt sein lassen, ob die Vorsehung es mir gestatten wird, die Arbeiten, die ich in dieser Beziehung angefangen habe, zu einem genügenden Ende zu führen.

Neisse, den 15. October 1847.

Otto.



## Druckfehler.

---

Seite 148, Zeile 23 *statt* unmerklicher *lies* merklicher.

„ 177, „ 12 *statt* in der *lies* in Folge der.

Vorrede Seite XXI, Zeile 23 *statt* letzten *lies* letztere.

---

In der *Ersten Fortsetzung der Bemerkungen etc.* und zwar in der Vorrede  
Seite VI, Zeile 15 muss *statt* 18 *vielmehr* 18 Grad *gelesen werden.*

---



## Druckfehler.

1010

Seite 118, Zeile 23 statt unmerklicher lies merklicher.  
" 127, " 12 statt in der lies in Folge der.  
Vorrede Seite X XI, Zeile 23 statt letzten lies letzter.

In der ersten Fortsetzung der Bemerkungen etc. und zwar in der Vorrede  
Seite VI, Zeile 15 muss statt 18 vielmehr 12 Grad gelesen werden.



# Abhandlung

*über die allgemeinen Gleichungen für das Gleichgewicht und die Bewegung, sowohl der festen elastischen Körper als auch der Fluida.*

Gelesen in der Academie der Wissenschaften am 12. October 1829.

Von Poisson.

In den beiden von mir der Academie vorgetragenen Abhandlungen, von denen die eine über das Gleichgewicht und die Bewegung elastischer Körper, die andre über das Gleichgewicht der Flüssigkeiten handelt, habe ich diese Körper als aus abgesonderten Molecülen gebildet vorausgesetzt, welche durch leere und von wägbarer Materie nicht erfüllte Räume von einander getrennt sind, so wie diess in der Natur wirklich statt hat. Bisher hatte man sich bei dieser Art von Fragen begnügt, die Körper als continuirliche Massen zu betrachten, welche man in unendlich kleine Elemente zerlegte und deren Anziehungen und Abstossungen man durch bestimmte Integrale ausdrückte. Aber diess war nur eine Annäherung, bei welcher man nicht mehr stehen bleiben darf, wenn man die mathematische Analyse auf die Erscheinungen, welche von der Zusammensetzung der Körper abhängen, anwenden und die Gesetze ihres Gleichgewichts und ihrer Bewegung auf die Wirklichkeit begründen will. Auch muss eifrigst danach getrachtet werden, diese Analyse so viel als möglich zu vereinfachen und dabei dem Calcül bei allen seinen verschiedenen Anwendungen diejenige Strenge zu bewahren, deren er fähig ist. Diess ist der Beweggrund, welcher mich veranlasst hat, die Fragen, welche ich bereits in den vorbezeichneten Abhandlungen (vereinzelt) behandelt hatte, noch ein Mal und zwar im Zu-



sammenhänge vorzunehmen. Meine neuen Untersuchungen haben mich zu keiner Aenderung in den Resultaten geführt; aber ich habe nichts verabsäumt, um, besonders in dem Theile, welcher sich auf das Gleichgewicht der Flüssigkeiten bezieht, die Betrachtungen, auf die ich mich gestützt habe, einfacher und zuweilen genauer einzurichten.

In der zweiten der vorbenannten Abhandlungen hatte ich mich nur mit dem Gleichgewicht, nicht aber mit der Bewegung der Flüssigkeiten beschäftigt. In der gegenwärtigen Abhandlung habe ich, in einer neuen Weise, den Druck berechnet, welchen Flüssigkeiten ausüben, die in Bewegung begriffen sind. Ich habe gefunden, dass dieser Druck nicht nach allen Richtungen hin derselbe ist, wie diess in dem Falle des Gleichgewichts statt hat; in dieser Beziehung muss man jedoch beachten, dass die Eigenschaft, nach allen Richtungen um einen Punkt herum gleichmässig zu drücken, nur bei ruhenden Flüssigkeiten durch die Erfahrung erkannt worden ist, und dass man diese Eigenschaft auf dem Wege der Analogie auf Flüssigkeiten ausgedehnt hat, welche in Bewegung sind. Wenn man aber über das innerste Wesen der Zusammensetzung der Flüssigkeiten und über die Wirkungen ihrer Molecüle nachdenkt, von denen die durch sie ausgeübten Pressungen herrühren, so wird man auf den Gedanken geführt, dass in dieser Beziehung ein wesentlicher Unterschied zwischen dem Zustande des Gleichgewichts und dem der Bewegung statt haben müsse; und man kann z. B. die Meinung fassen, dass es dieser Unterschied ist, welcher sich in dem Dampfgewehr zeigt, wo das Fluidum einen ungeheuer grossen Druck auf das Geschoss, zu gleicher Zeit aber einen viel geringeren Seitendruck auf das Innere des Rohrs ausübt.

Die Gleichungen für die Bewegung der Fluida, welche ich erhalten habe, sind nicht dieselben, welche man aus den Gleichgewichts-Gleichungen in Verbindung mit dem d'Alembertschen Prinzip ableitet. Sie entsprechen eben sowohl den tropfbaren, wie den luftförmigen Flüssigkeiten; ein Theil dieser Gleichungen bezieht sich auf das Verhalten der Fluida im Innern, die übrigen aber gelten für deren Oberfläche, mag nun diese frei oder in Verbindung mit einer festen Oberfläche sein. Man kann sie auf die Bewegung von Flüssigkeiten anwenden, welche in Röhren eingeschlossen sind,



die die Geschwindigkeit von jenen durch die Wirkung der Seitenwände auf die benachbarten Molecüle vermindern. Auch wird es gut sein, auf die von mir darin eingeführten neuen Glieder Acht zu haben, wenn man einen genauen Vergleich zwischen der in freier Luft beobachteten Geschwindigkeit des Tons und derjenigen anstellen will, welche aus dem Ton der Blasinstrumente abgeleitet wird, und den neuesten Erfahrungen von Herrn *Dulong* zufolge merklich von der ersten verschieden ist. Vor allem aber wird man sie in Rechnung stellen müssen, wenn es sich um die noch schnelleren Vibrationen des Aethers handelt, aus denen man in der Undulationstheorie die Erscheinungen des Lichtes erklärt. Diese neuen Ausdrücke in den besprochenen Gleichungen werden von der Dauer jeder Schwingung abhängen, und aus diesem Grunde wird ihre Betrachtung dazu dienen können, eine der grössten Schwierigkeiten in der Theorie der Lichtwellen zu heben, nemlich die Erklärung der ungleichen Brechbarkeit der verschiedenen Lichtstrahlen. Nach der Undulationstheorie nemlich unterscheiden sich die Farben, grade wie die Noten der musikalischen Scala, nach der Anzahl der Schwingungen, denen sie entsprechen. Da nun die gewöhnlichen Gleichungen für die Bewegung der Fluida nur deren Dichtigkeit und Spannkraft enthalten, so ist schwer einzusehen, wie die Lichtwellen oder die Lichtstrahlen von verschiedener Färbung bei ihrem Uebergange aus dem einen Mittel in ein anderes verschiedenartige Wirkungen hervorbringen können; diese Schwierigkeit verschwindet aber, wenn die Gleichungen für die Bewegung ausser den Angaben für die beiden auf einander folgenden Mittel noch ein specielles Symbol für jeden Lichtstrahl enthalten. Für den Augenblick begnüge ich mich, diese Betrachtungsweise anzudeuten, behalte mir aber vor, sie künftig angemessen weiter zu entwickeln. Der einzige Zweck, den ich bei der Abhandlung vor Augen gehabt habe, welche ich hiermit der Akademie vorlege, ist der, die allgemeinen Gleichungen für das Gleichgewicht und die Bewegung sowohl der festen elastischen Körper wie der tropfbaren Flüssigkeiten und der luftförmigen Fluida aufzustellen, und dieselben, so viel ich diess vermocht habe, vor jeder Anfechtung sicher zu stellen, damit sie im Stande seien, eine sichere Grundlage für die zahlreichen Anwendungen zu gewähren, welche man davon in der Physik und der



Mechanik machen kann. Ich werde mit um desto grösserem Vertrauen daran gehen, diese Anwendungen zu unternehmen, als bereits Herr *Savart*, ausser seinen erheblichen Bereicherungen der Wissenschaft, durch seine Versuche auch diejenigen Resultate bestätigt hat, zu denen ich in meiner ersten Abhandlung in Betreff der Drehung cylindrischer Ruthen, der Beziehungen zwischen den Tönen, welche eine und dieselbe Ruthe in Längenschwingungen, Transversalschwingungen und Drehungsschwingungen hervorbringt, und endlich in Betreff derjenigen Zwischenräume gelangt war, welche zwischen den Knotenlinien einer kreisförmigen, in Schwingung begriffenen Scheibe stattfinden.

## §. I.

### *Vorläufige Begriffe.*

1. Alle Theile der Materie sind zwei verschiedenen Arten gegenseitiger Einwirkung unterworfen. Die eine ist anziehend, unabhängig von der Natur des Körpers, dem Product der Massen proportional und steht im umgekehrten Verhältniss der Quadrate der Entfernungen: sie erstreckt sich auf unbestimmbare Weite in den Raum hinein und bringt die allgemeine Schwere, so wie alle diejenigen Erscheinungen des Gleichgewichts und der Bewegung hervor, welche zum Bereich der *Mechanik des Himmels* gehören. Die andere ist bald anziehend, bald abstossend: sie hängt von der Natur der Körpertheilchen und der mit letzteren verbundenen Wärmemenge ab; ihre Intensität nimmt bei zunehmender Entfernung reissend schnell ab und wird unmerklich, sobald die Entfernung eine wahrnehmbare Grösse erlangt hat. Die Berechnung der mechanischen Wirkungen dieser zweiten Art von Kräften wird den Gegenstand der vorliegenden Abhandlung bilden.

Die Körper werden durch abgesonderte *Molecüle* gebildet, d. h. durch Theile wägbarer Materie von unmerklicher Grösse, welche durch leere Räume oder durch Poren von einander getrennt sind, deren Abmessungen durch unsere Sinne ebenfalls nicht wahrgenommen werden können. Die Molecüle sind so klein und liegen so nahe bei einander, dass ein Theil eines Körpers, welcher eine ausserordentlich grosse Anzahl derselben enthält,



immer noch als unendlich klein gedacht werden kann, so dass sein Volumen keine wahrnehmbare Grösse hat. Diess vorausgesetzt, so beschreibe man um irgend einen Punkt  $M$  im Innern eines Körpers mit einem unmerklich kleinen Halbmesser eine Kugel, welche somit eine unendlich grosse Anzahl von Molecülen enthalten wird; sodann bezeichne man die Summe der Massen dieser Molecüle mit  $\mu$  und das Volumen jener Kugel mit  $v$ . Setzt man nun

$$\frac{\mu}{v} = \rho,$$

so ist diese Verhältnisszahl  $\rho$  dasjenige, was man die *Dichtigkeit* des Körpers im Punkte  $M$  nennt, wie gross sonst immerhin eine etwaige Ungleichheit in der Masse der Molecüle, so wie die Gleichmässigkeit oder Ungleichmässigkeit ihrer Vertheilung in dem Raume  $v$  sein möge. Bezeichnet man ferner die Anzahl der Molecüle, welche  $v$  in sich schliesst, mit  $n$  und setzt

$$\frac{v}{n} = \varepsilon^3,$$

so wird in gleicher Weise diese Linie  $\varepsilon$  von unmerklicher Grösse dasjenige sein, was wir den *mittleren Zwischenraum* der Molecüle für den Punkt  $M$  nennen werden.

Unabhängig von der wägbaren Materie, welche jedes Molecül bildet, enthält letzteres noch eine gewisse Menge derjenigen unwägbaren Substanz, welcher man die Erscheinungen der Wärme zuschreibt. Diese Substanz wird durch die Anziehung der wägbaren Materie mehr oder weniger stark in dem Molecül zurückgehalten. In jedem Augenblick entweicht ein Theil davon in der Form der Strahlung, während ein anderer Theil, der aus der Strahlung der übrigen Körperpartikelchen herrührt, bei seinem Zusammen treffen mit jenem Molecül entweder von diesem aufgenommen oder zurückgeworfen wird. Wir haben hier nicht weiter die Gesetze und die Ursachen dieses unaufhörlichen Austausches zu untersuchen, in Folge dessen die Wärmemenge, welche ein und dasselbe bestimmte Molecül eigenthümlich besitzt, constant oder veränderlich sein kann; wir wollen nur anführen, dass die Menge des Wärmestoffs, welcher im leeren Raume enthalten ist, im Vergleich zu derjenigen, welche sich an die materiellen Partikelchen anhängt, als unmerk-



lich betrachtet werden muss. Denn, wenn man einen leeren Raum plötzlich vermindert oder vergrössert, so bemerkt man, einem Versuche des Herrn Gay-Lussac zufolge, durchaus keine Veränderung der Wärme, weder in diesem Raume, noch in den angrenzenden Körpern, während grade das Gegentheil statt findet, wenn derselbe Raum eine kleine Quantität Luft oder irgend eines Gases enthält. Daraus ergibt sich, dass die abstossenden Kräfte, welche wir betrachten werden, nur von den materiellen Punkten der Körper ausgehen müssen und in keiner Weise von den leeren Räumen, die zwischen ihren Molecülen liegen. Diese können noch die elektrischen und magnetischen Fluida enthalten; aber wir wollen voraussetzen, dass sich dieselben in neutralem Zustande befinden und wir werden nur diejenigen Molecularkräfte berücksichtigen, welche von der Anziehung der wägbaren Materie und von der Repulsion des Wärmestoffs herrühren.

2. Diess vorausgesetzt, so wollen wir mit  $m$  und  $m'$  die Massen zweier benachbarter Molecüle, mit  $c$  und  $c'$  ihre Mengen an Wärmestoff, mit  $M$  und  $M'$  ihre Schwerpunkte, mit  $r$  die Entfernung  $MM'$  bezeichnen und nun die Wirkung betrachten, welche  $m'$  auf  $m$  ausübt und welche der Rückwirkung von  $m$  auf  $m'$  gleich und entgegengesetzt ist. Setzen wir zunächst voraus, dass die Abmessungen von  $m$  und  $m'$  im Verhältniss zu der Entfernung zwischen ihnen sehr klein sei. Dann wird sich die Wirkung, um welche es sich handelt, auf eine einzige Kraft reduciren, deren Richtung in die gerade Linie  $MM'$  fällt, und deren Intensität eine Function von  $r$  sein wird, welche wir mit  $R$  bezeichnen wollen. Zu gleicher Zeit wird ihre gegenseitige Repulsionskraft dem Product aus  $c$  und  $c'$ , ihre Anziehungskraft aber dem Product aus  $m$  und  $m'$  proportional sein. Betrachtet man die Kraft  $R$  als positiv oder negativ, jenachdem sie die Entfernung  $r$  zu vergrössern oder zu verkleinern strebt, so wird ihr Werth den jedesmaligen Ueberschuss der Repulsion über die Anziehung angeben; und wenn man dann voraussetzt, dass die gegenseitige Anziehung zwischen der Materie und dem Wärmestoff, welche letzteren in jedem Molecül zurückhält, sich auch nach aussen erstreckt, so wird man von jenem Ueberschuss die Anziehung des Wärmestoffs von  $m'$ , welche dieser auf die Materie von  $m$  ausübt, und die der Materie von  $m'$ , welche sie auf den Wärmestoff von  $m$  äussert, abzie-



hen müssen. Von diesen Wirkungen ist die erste dem Product  $mc'$  und die zweite dem Product  $m'c$  proportional. Somit wird der vollständige Werth von  $R$  dieser sein:

$$R = cc'\gamma - mm'\alpha - mc'\beta - m'c\beta';$$

wo die Coefficienten  $\gamma, \alpha, \beta, \beta'$ , positive Zahlen sind. Von diesen wird die erste sowohl von der Natur des  $m$ , als der des  $m'$  unabhängig, die zweite dagegen von beiden zugleich abhängig sein, während die dritte nur von der Natur des  $m$ , und die vierte nur von der Natur des  $m'$  abhängen wird.

Zieht man die drei letzteren Glieder von  $R$  in einen einzigen Ausdruck zusammen, so kann man den Werth von  $R$  in folgender Form schreiben

$$R = Fr - fr.$$

Jede der beiden Functionen  $Fr$  und  $fr$  wird nur positive Werthe haben können und diese Werthe werden äusserst schnell und ohne Alternative abnehmen, nach Maassgabe, wie  $r$  zunimmt, dergestalt, dass sie unmerklich sein werden für jeden Werth von  $r$ , welcher merklich ist. Für einen gewissen Werth dieser Entfernung wird man  $Fr = fr$  und  $R = 0$  haben können; das Vorzeichen von  $R$  wird dann diesseits und jenseits dieses Punktes verschieden sein, sei es nun, dass entweder die Repulsion  $Fr$  zunächst das Uebergewicht über die Anziehung  $fr$  hat und später schneller abnimmt, oder dass in Beziehung auf diese beiden Kräfte das Gegentheil stattfindet. Man wird später (Nro. 39) sehen, dass diese beiden Fälle sich wirklich in der Natur darbieten.

Wenn die Molecüle  $m$  und  $m'$  nicht so weit von einander entfernt sind, dass ihre Form keinen merklichen Einfluss auf ihre gegenseitige Wirkung äussert, dann wird die Richtung der Wirkung von  $m'$  auf  $m$  nicht mehr nothwendig in die gerade Linie  $MM'$  fallen, und es kann selbst vorkommen, dass sie sich nicht auf eine einzige Kraft reducirt. Zwar werden die einzelnen Theilkräfte immer noch Functionen von  $r$  sein, welche nur für unmerkliche Werthe dieses Veränderlichen ihrerseits merkliche Werthe haben werden; allein sie werden dann ausserdem auch noch von den Winkeln abhängen, welche die Richtung der geraden Linie  $MM'$  in Bezug auf feste Schnittflächen im Innern von  $m$  und  $m'$  bestimmen und werden sich ändern, wenn eines der Molecüle



sich um das andere oder um sich selbst drehet, ohne dass die Entfernung  $MM'$  ihrer Schwerpunkte sich dabei ändert. Dieser Fall ist der allgemeinere und findet bei den festen Körpern statt; der speciellere Fall, in welchem die Molecularwirkung sich auf die Kraft  $R$  reducirt, ist derjenige der Fluiden und ist bei diesen, wie später auseinandergesetzt werden wird, eine Folge der vollkommenen Beweglichkeit ihrer Theile.

3. Unter allen Umständen werden wir voraussetzen, dass die Wirkungssphäre jedes Punktes des Körpers, obgleich ihr bezüglichlicher Halbmesser durchaus unmerklich ist, dennoch eine ausserordentlich grosse Anzahl von Molecülen in sich begreift. Diese Hypothese wird die einzige sein, welche ich in dieser Abhandlung annehme und sie wird von den Physikern ohne Zweifel als der Natur entsprechend zugelassen werden. Sie wird es möglich machen, die Mittelkräfte (Resultanten) der Molecularwirkungen im Innern der Körper in Functionen der Coordinaten auszudrücken, welche den verschiedenen Punkten des Körpers entsprechen, und diess selbst dann, wenn die Molecüle in dem Bereiche ihrer Wirkungssphäre ohne alle Regelmässigkeit vertheilt sein sollten; ein Fall, den man augenscheinlich in Betreff der nicht cristallisirten Körper voraussetzen muss.

Betrachtet man daher zwei Partikelchen  $A$  und  $B$  eines nicht cristallisirten Körpers, welche zwar nur eine ganz unmerkliche Ausdehnung haben, von denen indessen ein jedes eine sehr grosse Anzahl von Molecülen in sich begreift, und will man die Totalwirkung von  $A$  auf  $B$  bestimmen, so wird man mithin bei dieser Berechnung annehmen können, dass die gegenseitige Einwirkung zweier Molecüle  $m$  und  $m'$  aufeinander, sich, wie bei den Fluiden, auf eine Kraft  $R$  reducirt, deren Richtung in die grade Verbindungslinie ihrer Schwerpunkte  $M$  und  $M'$  fällt, und deren Intensität nur eine Function der Entfernung  $MM'$  sein wird. Denn, wie immerhin diese Wirkung beschaffen sein möge, so kann man sie durch eine ähnliche Kraft ersetzen, welche die Mittelkraft aus den Wirkungen aller Punkte von  $m'$  auf alle die von  $m$  ist, und welche man mit einer andern Kraft  $R'$ , oder nöthigenfalls mit zwei andern Kräften  $R'$  und  $R''$  combiniren wird, die von der bezüglichlichen Anordnung der beiden Molecüle abhängig sind. Da aber, der Voraussetzung zufolge, in dieser Anordnung durchaus keine Regelmässigkeit stattfindet und die Anzahl der



Molecüle sowohl in  $A$  als in  $B$  ausserordentlich gross, oder mit andern Worten unendlich gross ist, so begreift man, dass alle die Kräfte, wie  $R'$  und  $R''$ , sich gegenseitig aufheben werden, ohne die Totalwirkung von  $A$  auf  $B$  zu ändern, und dass letztere mithin nur von den Kräften  $R$  abhängen wird. Uebrigens muss noch hinzugefügt werden, dass für einen und denselben Zuwachs der Entfernung die Intensität der Kräfte  $R'$  und  $R''$  im Allgemeinen schneller abnehmen wird, als die der Kräfte  $R$ ; ein Umstand, der ebenfalls dazu beitragen wird, den Einfluss jener ersteren Kräfte auf die gegenseitige Einwirkung zwischen  $A$  und  $B$  verschwinden zu machen.

Anders wird sich diess stellen, wenn es sich um einen cristallisirten Körper handelt, in welchem die Molecüle sich symmetrisch geordnet und in jedem Theile, welcher eine sehr grosse Anzahl derselben enthält, mit Regelmässigkeit vertheilt vorfinden. Wir werden in der Folge ein specielles Beispiel für die Berechnung der gegenseitigen Wirkung zweier Theile eines solchen Körpers geben.

Diess sind die Prinzipien, nach denen wir die Pressungen bestimmen werden, welche sowohl im Innern als an der Oberfläche elastischer fester Körper und der Fluiden von der Molecularwirkung herrühren. Man wird daraus ohne Schwierigkeit die Gleichungen für das Gleichgewicht und die Bewegung der genannten Körper erschliessen. Um aber die desfallsigen Erörterungen zugänglicher zu machen, wollen wir uns in dem folgenden Paragraphen zunächst mit einer einfacheren Frage ausführlich beschäftigen.

## §. II.

*Berechnung der Molecularwirkungen und der Gleichgewichtsgleichungen für Molecüle, welche alle auf einer geraden Linie liegen.*

4. Betrachten wir eine Reihe materieller Punkte, welche auf einer geraden Linie  $AB$  liegen, die wir uns vertical denken wollen. Sei  $A$  das untere,  $B$  das obere Ende derselben. Sei  $M$  ein beliebiger Punkt dieses Systems und  $M'$  ein anderer solcher Punkt, welcher oberhalb  $M$  und innerhalb



dessen Wirkungssphäre liegen mag. Bezeichne  $s$  die Entfernung  $MM'$  und  $U$  die gegenseitige Einwirkung zwischen  $M$  und  $M'$ , so dass  $U$  eine Grösse ist, welche unmerklich wird, sobald  $s$  einen merklichen Werth hat. Ferner mögen  $x$  und  $x'$  die Entfernungen  $AM$  und  $AM'$  bezeichnen, so dass also  $x' = x + s$  ist. Wenn die materiellen Punkte, welche sich in der geraden Linie  $AB$  befinden, homogen sind, so wird  $U$  nur eine Function von  $s$  sein; sind sie aber heterogen, so wird  $U$  ausserdem Function von  $x$  und  $x'$ , und in Bezug auf diese letzteren beiden Veränderlichen symmetrisch sein. In diesem allgemeinsten Falle wird man also

$$U = F(s, x, x')$$

haben, woraus dann

$$U = F(s, x, x') + s \cdot \frac{dF(s, x, x')}{dx'} + \frac{1}{2} s^2 \cdot \frac{d^2 F(s, x, x')}{dx'^2} + \dots$$

folgt, und wo vorausgesetzt wird, dass man nach ausgeführter Differenziation jedesmal  $x' = x$  gesetzt habe. Unter der Voraussetzung, dass die Materie der betrachteten Punkte in dem Bereiche derjenigen Werthe von  $U$ , welche merklich sind, ihrerseits nicht merklich verschieden sei, wird diese Reihe ausserordentlich convergent sein. Behält man hiernach nur ihre ersten zwei Glieder bei und beachtet man, dass wegen der Symmetrie von  $F(s, x, x')$ , in Bezug auf  $x$  und  $x'$ ,

$$\frac{dF(s, x, x')}{dx'} = \frac{1}{2} \frac{dF(s, x, x)}{dx}$$

ist, sobald man sich  $x' = x$  gesetzt denkt, so hat man

$$U = fs + \frac{1}{2} s \cdot \frac{dfs}{dx}, \quad (1)$$

wo  $fs$  eine Function von  $s$  und  $x$  ist, welche nur für unmerkliche Werthe von  $s$  ihrerseits merkliche Werthe giebt und deren Form in Bezug auf  $x$  gegeben ist. Der Punkt  $M$  liege nun in einer Entfernung von den Endpunkten  $A$  und  $B$ , welche grösser ist, als der Halbmesser der Molecular - Wirkungs-



sphäre, und es soll nun die Wirkung berechnet werden, welche von allen oberhalb  $M$  liegenden Punkten, wie  $M'$  einer ist, auf  $M$  ausgeübt werden.

Wir wollen zuerst annehmen, dass  $fs$  unabhängig von  $x$  sei, wodurch die Gleichung (1) sich auf  $U = fs$  zusammenzieht, und wollen dabei voraussetzen, dass die Zwischenräume zwischen je 2 zunächst aufeinander folgenden Punkten alle gleich seien. Bezeichnen wir diesen constanten Zwischenraum mit  $\varepsilon$ , so wird mithin  $s$  ein Vielfaches von  $\varepsilon$  sein. Wenn man daher die gesuchte Kraft  $F$  nennt, so wird man

$$F = f\varepsilon + f2\varepsilon + f3\varepsilon + f4\varepsilon + \dots \dots \dots (2)$$

haben, und der Natur der Function  $s$  zufolge und bei der für  $M$  vorausgesetzten Entfernung von den Endpunkten  $A$  und  $B$  wird man diese Reihe bis ins Unendliche erstrecken können. Wenn wir daher dahin übereinkommen, die Kraft  $fs$  als positiv oder negativ anzusehen, jenachdem sie abstossend oder anziehend wirkt, so wird die Kraft  $F$  den Punkt  $M$  zu heben oder ihn niederzudrücken streben, jenachdem ihr Zahlenwerth negativ oder positiv ist.

5. Das Integral  $\int_0^\infty fs \cdot ds$ , dividirt durch  $\varepsilon$  und vermindert um  $\frac{1}{2}fo$ , wird ein Näherungswerth der Summe  $F$  sein, und man hat in meiner Abhandlung über die *numerische Berechnung der bestimmten Integrale* (Band VI der neuen Memoiren der Academie der Wissenschaften) gesehen, dass die Differenz dieser beiden Grössen immer durch ein anderes bestimmtes Integral ausgedrückt werden kann, dergestalt, dass man mit völliger Genauigkeit hat:

$$F = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \int_0^\infty fs \cdot ds - \frac{1}{2}fo + \frac{2}{\varepsilon} \cdot \int_0^\infty \left[ \sum_1^\infty \cos \frac{2i\pi s}{\varepsilon} \right] \cdot fs \cdot ds; \quad (3)$$

hierin bezeichnet  $\pi$ , wie in dieser ganzen Abhandlung, das Verhältniss des Kreisumfanges zum Durchmesser und  $i$  jede beliebige positive ganze Zahl.  $\sum_1$  aber ist das Summenzeichen, und die Werthe für  $i$  erstrecken sich von  $i=1$  bis  $i = \infty$ .

Mittelst des Verfahrens der theilweisen Integration kann man das zweite Integral in dem Ausdrücke für  $F$  in eine Reihe verwandeln, welche nach geraden Potenzen von  $\varepsilon$  geordnet ist, und deren Coefficienten die unge-



raden Differenziale von  $fs$ , welche sich auf die beiden Grenzwerte von  $s$  beziehen, enthalten. Da die Differenzialquotienten von  $fs$  sämtlich Functionen von derselben Natur wie  $fs$  sind und für jeden merklichen Werth von  $s$  ebenfalls verschwinden, so können wir diejenigen ganz unberücksichtigt lassen, welche der zweiten Grenze des Integrals entsprechen. Bezeichnen wir dann die Werthe, welche

$$fs, \frac{dfs}{ds}, \frac{d^2fs}{ds^2}, \frac{d^3fs}{ds^3}, \dots$$

für  $s = 0$  annehmen, der Reihe nach mit  $f, f', f'', f''',$  u. s. w., so ergibt die Gleichung (3)

$$F = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\infty fs \cdot ds - \frac{1}{2}f - a \cdot \varepsilon \cdot f' + a' \cdot \varepsilon^3 \cdot f''' - a'' \cdot \varepsilon^5 \cdot f^{(5)} + \dots, (4)$$

wo der Abkürzung wegen,

$$\frac{1}{\pi} \cdot \sum_1^\infty \frac{1}{i^2} = a, \quad \frac{1}{2\pi^2} \cdot \sum_1^\infty \frac{1}{i^4} = a', \quad \frac{1}{4\pi^3} \cdot \sum_1^\infty \frac{1}{i^6} = a'', \text{ u. s. w.}$$

gesetzt worden ist. Diese Coefficienten bilden eine Reihe von Brüchen mit abnehmenden Ziffernwerthen, deren genaue Werthe man kennt, es ist nemlich

$$a = \frac{1}{12}, \quad a' = \frac{1}{720}, \quad a'' = \frac{1}{30240}, \quad \text{u. s. w.}$$

Was die Reihe (4) selbst betrifft, so mag man dieselbe bei einem Gliede abbrechen, bei welchem man will, immer wird der Rest, welchen man noch hinzufügen müsste, um den Werth der vollständigen Reihe zu haben, durch ein bestimmtes Integral dargestellt werden können, dessen Werth im Allgemeinen von einem Gliede zum andern wechseln wird, für welchen man jedoch jedesmal wird Grenzen angeben können, aus denen ersichtlich ist, ob die Reihe convergent ist. In der vorbezeichneten Abhandlung habe ich ausführlich den besonderen Fall untersucht, wo der Rest constant bleibt und wo die Glieder der Reihe (4), mit Ausnahme der zwei ersten, sämtlich verschwinden; wodurch man genöthigt ist, für die Berechnung des Werthes von  $F$  auf die Gleichung (3) zurückzugehen.



6. Man kann diesen Werth auch noch unter einer andern Form darstellen, von der es gut ist, sie zu kennen.

Sei  $\mu$  eine willkürlich gewählte ganze Zahl. Setzen wir nun  $\mu\varepsilon = h$ , so wird jeder beliebige Werth von  $s$  durch

$$s = ih + n\varepsilon$$

dargestellt werden können, wo  $i$  eine ganze Zahl oder 0, und  $n$  eine der Zahlen 1, 2, 3, u. s. w. bis  $\mu$  ist. Daraus folgt, wenn man

$$ih = u, \quad \Sigma_1^\mu f(u + n\varepsilon) = \varphi u$$

setzt, dass die Gleichung (2) die nachstehende Gestalt annimmt:

$$F = \varphi 0 + \varphi h + \varphi 2h + \varphi 3h + \dots u. s. w.$$

Setzt man demnach in der Gleichung (4) statt  $\varepsilon$  und  $f$  beziehlich  $h$  und  $\varphi$  und fügt in dem zweiten Gliede  $\varphi 0$  hinzu, so hat man zunächst

$$F = \frac{1}{h} \int_0^\infty \varphi u \cdot du + \frac{1}{2} \varphi - a \cdot h \cdot \varphi' + a' \cdot h^3 \cdot \varphi''' - a'' \cdot h^5 \cdot \varphi^{(5)} + u. s. w. \quad (5)$$

Nach dem Taylorschen Satze ist

$$f(u + n\varepsilon) = fu + n\varepsilon \cdot \frac{dfu}{du} + \frac{1}{2} n^2 \varepsilon^2 \cdot \frac{d^2 fu}{du^2} + u. s. w.$$

Wenn man also allgemein

$$\varepsilon^\mu \cdot \Sigma_1^\mu n^\mu = h_\mu$$

setzt, so wird daraus

$$\varphi u = h_0 \cdot fu + h_1 \cdot \frac{dfu}{du} + \frac{1}{2} h_2 \cdot \frac{d^2 fu}{du^2} + u. s. w.$$

hervorgehen. Die Werthe von  $h_0, h_1, h_2$ , u. s. w. sind leicht zu erlangen.

Setzt man  $\frac{h}{\varepsilon}$  an die Stelle von  $\mu$ , so wird der Werth von  $h_\mu$  die Form



$\frac{h}{\varepsilon} \cdot g_m$  annehmen, wo  $g_m$  eine in Bezug auf  $h$  und  $\varepsilon$  homogene Function vom  $m^{\text{ten}}$  Grade ist. Man hat insbesondere  $g_0 = 1$ , mithin

$$\varphi u = \frac{h}{\varepsilon} \left( fu + g_1 \cdot \frac{dfu}{du} + \frac{g_2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2 fu}{du^2} + \frac{g_3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{d^3 fu}{du^3} + u. s. w. \right),$$

und dieser Werth ist in der Gleichung (5) zu substituiren. Da aber die Grösse  $h$  ganz willkürlich ist, so leuchtet ein, dass sie nach erfolgter Substitution aus dem Werthe von  $F$  ganz herausfallen und verschwinden muss. Man kann mithin  $h = 0$  setzen und es werden dadurch alle Glieder der Reihe (5), mit alleiniger Ausnahme des ersten, zu Null werden. Bezeichnet man das, was alsdann aus  $g_m$  wird, mit  $\varepsilon^m b_m$ , so wird man

$$F = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\infty \left( fs + b_1 \cdot \varepsilon \cdot \frac{dfs}{ds} + \frac{b_2 \cdot \varepsilon^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2 fs}{ds^2} + \frac{b_3 \cdot \varepsilon^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{d^3 fs}{ds^3} + u. s. w. \right) ds, \quad (6)$$

haben, wenn man unter dem Integralzeichen  $s$  für  $u$  setzt.

Die Summe  $F$  ist mithin in ein Integral umgewandelt bezüglich auf die Function von  $s$ , welche zwischen den Klammern steht und welche unmittelbar aus der gegebenen Function abgeleitet werden kann.

Uebrigens ist die Formel (6) dasselbe, wie

$$F = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\infty fs \cdot ds - b_1 \cdot f - \frac{b_1 \cdot \varepsilon}{1 \cdot 2} \cdot f' - \frac{b_3 \cdot \varepsilon^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot f'' - \frac{b_4 \cdot \varepsilon^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot f''' - u. s. w.$$

Die numerischen Coefficienten  $b_1, b_2, b_3, b_4$ , u. s. w. lassen sich leicht aus den Ausdrücken für die Summen  $h_1, h_2, h_3$ , u. s. w. herleiten. Vergleicht man die Werthe der Coefficienten mit geraden Marken mit denen von  $a, a', a'',$  u. s. w., so findet man

$$b_2 = 1 \cdot 2 \cdot a, \quad b_4 = -1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot a', \quad u. s. w.,$$

was dagegen die Coefficienten mit ungeraden Marken anbetrifft, so ergiebt sich  $b_1 = \frac{1}{2}$ , während alle übrigen gleich Null sind, wodurch dann die vorstehende Formel mit der Gleichung (4) zusammenfällt, wie auch sein muss.



7. Im Allgemeinen ist noch Folgendes zu beachten. Da  $fs$  eine Function von der Art derjenigen ist, welche sich sehr schnell ändern und unmerklich werden, sobald der Variable einen irgend merklichen Werth angenommen hat, so sind die Werthe der Ausdrücke

$$fs, \quad s \cdot \frac{dfs}{ds}, \quad s^2 \cdot \frac{d^2fs}{ds^2}, \quad s^3 \cdot \frac{d^3fs}{ds^3}, \quad u. \quad s. \quad w.$$

in Bezug auf ihre Grösse alle von einerlei Ordnung. Damit also die Constanten  $f, \quad \varepsilon \cdot f', \quad \varepsilon^2 \cdot f'', \quad \varepsilon^3 \cdot f''', \quad u. \quad s. \quad w.$  eine sehr schnell abnehmende Reihe bilden, ist es nöthig, aber auch genügend, dass  $\varepsilon$  im Verhältniss zu den merklichen Werthen von  $fs$  sehr klein sei; diess aber findet der Hypothese der Nro. 3 zufolge wirklich statt, indem danach die Sphäre der Molecularwirkung eine ausserordentlich grosse Zahl von Molecülen umfasst. Hiernach wird also die Reihe (4) sehr convergent und, unter den gemachten Voraussetzungen, das zweite in der Formel (3) enthaltene Integral immer eine ausserordentlich kleine Grösse sein, sei es nun, dass dieses Integral sich in einer Reihe entwickeln lässt, welche nach Potenzen von  $\varepsilon$  fortschreitet, oder sei es, dass eine solche Entwicklung nicht statt hat, weil alle die Grössen  $f', \quad f'', \quad f''', \quad u. \quad s. \quad w.$  Null sind.

Um diese allgemeinen Behauptungen durch Beispiele zu erläutern, so sei zunächst etwa

$$fs = c \cdot e^{-\frac{s}{a}},$$

wo  $c$  eine gegebene Constante,  $e$  die Basis der natürlichen Logarithmen und  $a$  eine constante Linie von unmerklicher Länge bezeichnet, damit die Werthe von  $fs$  für jeden merklichen Werth von  $s$  ebenfalls unmerklich seien. Sei  $\varepsilon = \beta \cdot a$ , und setzen wir voraus, dass  $\beta$  eine ausserordentlich kleine Bruchzahl sei, dann giebt die Gleichung (4)

$$F = c \cdot \left( \frac{1}{\beta} - \frac{1}{2} + a \cdot \beta - a' \cdot \beta^3 + a'' \cdot \beta^5 - u. \quad s. \quad w. \right)$$

und diese Reihe wird sehr convergent sein, weil ihre Glieder, vom dritten an gerechnet, schneller abnehmen als die ungeraden Potenzen von  $\beta$ .



Ferner sei beispielsweise

$$fs = c \cdot e^{-\frac{s^2}{\alpha^2}},$$

dann wird  $f' = 0$ ,  $f'' = 0$ ,  $f''' = 0$ , u. s. w. Diess ist also ein Fall, wo das zweite Integral in der Formel (3) nicht nach Potenzen von  $\varepsilon$  entwickelt werden kann, weil die bezügliche Reihe = Null wird. Da aber

$$\int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{\alpha^2}} \cdot \cos \frac{2i\pi s}{\varepsilon} \cdot ds = \frac{1}{2} \alpha \cdot V_{\pi} \cdot e^{-\frac{4i^2\pi^2\alpha^2}{\varepsilon^2}}$$

ist, so wird die Gleichung (2) wenn man

$$\frac{2\pi\alpha}{\varepsilon} = \gamma$$

setzt, Nachstehendes ergeben:

$$F = \frac{c}{2V_{\pi}} \cdot \left( \frac{1}{2}\gamma - V_{\pi} + \gamma \cdot e^{-\gamma} - \gamma \cdot e^{-4\gamma^2} + \gamma \cdot e^{-9\gamma^3} - \text{u. s. w.} \right)$$

Da nun  $\gamma$  eine sehr grosse Zahl ist, so sieht man, dass diese Reihe ausserordentlich convergent sein wird, und dass, vom zweiten Gliede an gerechnet, die Zahlenwerthe der folgenden durchaus unmerklich sein werden.

Die Hypothese der Nr. 3 würde die Glieder der Reihe (4) immer unmerklich machen, so dass sie gegen das erste vernachlässigt werden könnten, oder, was auf dasselbe hinausläuft, das zweite Integral der Formel (2) würde im Vergleich zu dem ersten Integral derselben immer unmerklich werden, wenn die Function  $fs$  immer nur aus einem einzigen Gliede bestände, welches sein Vorzeichen nicht wechselt, wie diess in den beiden vorhergehenden Beispielen der Fall war. Diess findet jedoch in der Natur nicht statt, indem die Molecularwirkung von *zwei* Kräften herrührt, von denen die eine anziehend, die andere abstossend wirkt, und diess kann begreiflicherweise zur Folge haben, dass z. B. das zweite Glied der Reihe (4) einen Werth hat, der gegen den des ersten nicht verschwindend klein ist. So wird z. B. für den Fall

$$fs = c \cdot e^{-\frac{s}{\alpha}} - c' \cdot e^{-\frac{s}{\alpha'}},$$

wo  $c$ ,  $c'$ ,  $\alpha$ ,  $\alpha'$  positive Constanten sind,



$$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\infty} f s . ds = \frac{c . \alpha}{\varepsilon} - \frac{c' . \alpha'}{\varepsilon} \quad \text{und} \quad f = c - c'$$

sein, und wenn gleich  $\frac{\alpha}{\varepsilon}$  und  $\frac{\alpha'}{\varepsilon}$  sehr grosse Zahlen sind, so wird es doch genügen, dass  $c$  und  $c'$  nahehin im umgekehrten Verhältniss dieser Zahlen stehen, um zur Folge zu haben, dass der Werth von  $f$  im Vergleich zu  $\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\infty} f s . ds$  erheblich und selbst überwiegend sein könne. Diese Bemerkung reicht aus, um zu zeigen, dass die Summe, welche  $F$  repräsentirt, sich nicht immer nothwendig auf das Integral  $\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\infty} f s . ds$  reducirt, und dass dieses, allgemein genommen, nur ein Theil ihres vollen Werthes ist.

8. Nehmen wir nun an, dass die Schwere oder andere in verticaler Richtung sich äussernde Kräfte auf die von uns betrachteten Punkte wirken und die Zwischenräume ändern, welche die letzteren trennen. Es wird leicht sein, bei der Berechnung von  $F$  auf diese Aenderung Rücksicht zu nehmen, sobald sie nur unmerklich ist, wenn  $s$  merkliche Werthe annimmt, was immer der Fall sein wird, so lange man, wie bisher, voraussetzt, dass die Entfernung des Punktes  $M$  von den Endpunkten  $A$  und  $B$  eine merkliche Grösse habe.

Sei nun  $\varepsilon = \psi x$ , wo  $\psi x$  eine Function von  $x$  oder der Entfernung  $AM$  bezeichnet, welche allen denjenigen Werthen dieser Grösse entsprechen soll, die eine merkliche Ausdehnung haben und dabei merklich kleiner als  $AB$  sind;  $\varepsilon$  aber bezeichne den Zwischenraum zwischen  $M$  und dem unmittelbar darüber befindlichen materiellen Punkte. Bezeichne  $\varepsilon'$  dasselbe in Bezug auf Punkt  $M'$ , was  $\varepsilon$  in Bezug auf  $M$  ist, und wo die Lage von  $M'$  die vor angegebene ist. Dann wird man  $\varepsilon' = \psi (x + s)$  haben, und diese Function in einer nach Potenzen von  $s$  geordneten convergenten Reihe entwickeln können, weil sie, der Voraussetzung gemäss, innerhalb der Grenzen dieses Variabeln nicht merklich variirt. Vernachlässigt man dann das Quadrat von  $s$ , so hat man

$$\varepsilon' = \psi x + s . \frac{d\psi x}{dx} = \varepsilon + s . \frac{d\varepsilon}{dx}.$$



Bezeichnet man die Anzahl der materiellen Punkte, welche in dem Raume zwischen  $M$ , diesen Punkt ausgeschlossen, und  $M'$ , diesen Punkt mit eingeschlossen, liegen, mit  $n$ , so wird die Entfernung  $s$  gleich  $n\varepsilon$  sein, wenn man von der Veränderung der Zwischenräume gänzlich absieht, und es wird daraus

$$\varepsilon' = \varepsilon + n \cdot e \cdot \frac{d\varepsilon}{dx}$$

hervorgehen. In einer zweiten Annäherung wird der Werth von  $s$  der Summe derjenigen  $n$  Werthe von  $\varepsilon'$  gleich sein, welche man aus dieser letzteren Formel ableitet, indem man für  $n$  nach und nach  $0, 1, 2, 3, \dots, n-1$  setzt. Diess giebt

$$s = n\varepsilon + \frac{n(n-1)\varepsilon}{2} \cdot \frac{d\varepsilon}{dx},$$

ein Ausdruck, den man auch so schreiben kann:

$$s = n \cdot w + n^2 \cdot w^2 \cdot \lambda, \quad (7)$$

wenn man, um abzukürzen,

$$\varepsilon \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{d\varepsilon}{dx}\right) = w \quad \text{und} \quad \frac{1}{2w} \cdot \frac{dw}{dx} = \lambda$$

setzt und das Glied  $\frac{1}{2} \cdot \frac{d\varepsilon}{dx}$  im Vergleich zur Einheit in demjenigen Gliede vernachlässigt, welches mit  $n^2 \cdot w^2$  multiplicirt und bereits von der Ordnung des Quadrats von  $s$  ist.

Diess vorausgesetzt, mache man

$$s \cdot \frac{ds}{ds} = f_1 s, \quad s^2 \cdot \frac{d^2 s}{ds^2} = f_2 s, \quad s^3 \cdot \frac{d^3 s}{ds^3} = f_3 s, \quad \text{u. s. w.,}$$

dann werden wir nach dem Taylorschen Satze haben:

$$fs = f(nw) + nw\lambda \cdot f_1(nw) + \frac{n^2 w^2 \lambda^2}{1 \cdot 2} \cdot f_2(nw) + \text{u. s. w.}$$



Da die Grössen  $f(nw)$ ,  $f_1(nw)$ ,  $f_{11}(nw)$  u. s. w., alle von derselben Ordnung sind und da das Product  $nw\lambda$ , oder was nahehin dasselbe ist,  $\frac{1}{2}s \cdot \frac{d\varepsilon}{dx}$ , nur eine sehr kleine Grösse sein kann, so werden die Glieder des Ausdrucks für  $fs$  sehr schnell abnehmen. Wir werden nur die beiden ersten in Rechnung stellen, und wenn wir dann für  $\lambda$  wieder seinen ursprünglichen Ausdruck setzen, so wird die Function  $fs$  in diese andere verwandelt sein:

$$fs + \frac{1}{2}s^2 \cdot \frac{dfs}{ds} \cdot \frac{dw}{w \cdot dx},$$

wo nun der Veränderliche  $s$  gegenwärtig ein Vielfaches von  $w$  ist.

Um also die Veränderung der Molecular-Zwischenräume zu berücksichtigen, wird es genügen, wenn man in der Reihe (4)  $w$  an die Stelle von  $\varepsilon$  setzt und  $fs$  um die Grösse  $\frac{1}{2}s^2 \cdot \frac{dfs}{ds} \cdot \frac{dw}{w \cdot dx}$  vermehrt; und da man

$$\int_0^\infty s^2 \cdot dfs = -2 \int_0^\infty s \cdot fs \cdot ds$$

hat, so folgt

$$F = \frac{1}{w} \cdot \left( \int_0^\infty fs \cdot ds - \frac{dw}{w \cdot dx} \int_0^\infty sfs \cdot ds \right) - \frac{1}{2}f - a \cdot w \cdot f' \\ + a^1 \cdot w^3 \cdot \left( f''' + 3 \frac{dw}{w \cdot dx} \cdot f'' \right) - a^{11} \cdot w^5 \cdot \left( f^{(v)} + 10 \frac{dw}{w \cdot dx} \cdot f^{(iv)} \right) + \text{u. s. w.}$$

Uebrigens muss man, wenn die von uns in Betracht gezogenen Punkte nicht homogen sein sollten, den Werth  $fs$  in diesem Ausdruck für  $F$  nach Anleitung der Gleichung (1) noch um das Glied  $\frac{1}{2}s \cdot \frac{dfs}{dx}$  vermehren. Alsdann wird jeder der Coefficienten  $\frac{1}{w}$ ,  $w^3$ ,  $w^5$ , u. s. w. aus vier Gliedern bestehen, von denen man jedoch das jedesmalige vierte vernachlässigen darf, nemlich diejenigen Glieder, welche aus der Vermehrung des  $fs$  in



$\int_0^\infty s \cdot fs \cdot ds$ ,  $f''$ ,  $f''''$ , u. s. w. hervorgehen, indem sie im Vergleich zu den drei übrigen jedesmal zugehörigen Gliedern als unmerklich zu betrachten sind. Uebrigens ist zu beachten, dass dieses Glied, wenn man darauf Rücksicht nehmen wollte, nicht vollständig sein würde, indem es ein Glied von derselben Ordnung der Grösse geben würde, welches von den Ausdrücken  $\int_0^\infty fs \cdot ds$ ,  $f'''$ ,  $f^v$ , u. s. w. herrührt, und seinen Ursprung in dem von  $s^2$  abhängenden Theile hat, welcher in der Formel (1) vernachlässigt worden ist. Setzt man daher, um abzukürzen,

$$\int_0^\infty fs \cdot ds = h, \quad \int_0^\infty s \cdot fs \cdot ds = k,$$

und beachtet, dass

$$\int_0^\infty s \cdot \frac{dfs}{dx} \cdot ds = \frac{dk}{dx},$$

so wird der vorstehende Werth von  $F$  hiernach in den nachstehenden übergehen:

$$\begin{aligned} F = & \frac{1}{w} \cdot \left( h + \frac{1}{2} \frac{dk}{dx} - \frac{dw}{w \cdot dx} \cdot k \right) - \frac{1}{2} f - a \cdot w \cdot \left( f' + \frac{1}{2} \frac{df}{dx} \right) \\ & + a' \cdot w^3 \cdot \left( f''' + \frac{3}{2} \frac{df''}{dx} + 3 \frac{dw}{w \cdot dx} \cdot f'' \right) \\ & - a'' \cdot w^5 \cdot \left( f^v + \frac{5}{2} \frac{df^{iv}}{dx} + 10 \frac{dw}{w \cdot dx} f^{iv} \right) \\ & + \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

Bei dem Grade der Annäherung, auf welchen wir uns beschränkt haben, wird der vorstehende Ausdruck für die Kraft  $F$  der vollständige sein, weil bei der Bildung desselben sowohl auf eine mögliche Heterogenität der Materie, als auf die Veränderlichkeit der Molecular-Zwischenräume Bedacht genommen worden ist. Man wird diesen Ausdruck einfacher in folgender Form schreiben können:



$$\left. \begin{aligned} F = & \frac{1}{w} \cdot h - \frac{1}{2}f - a \cdot w \cdot f^I + a^I \cdot w^3 \cdot f^{III} - a^{II} \cdot w^5 \cdot f^V + u. s. w. \\ & + \frac{w}{2} \cdot \frac{d \left[ \frac{k}{w^2} - a f + 3 a^I \cdot w^2 \cdot f^{II} - 5 a^{II} \cdot w^4 \cdot f^{IV} + u. s. w. \right]}{dx}, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

wo dann ersichtlich ist, dass der Ausdruck für  $F$  von zwei Reihen abhängt, von denen die eine wie die andere sehr convergent ist.

9. Nun sei in gleicher Weise  $F$ , die Kraft, welche in der Richtung  $MB$ , also entgegengesetzt der Kraft  $F$  wirkt, und durch alle unteren Punkte auf den Punkt  $M$  ausgeübt wird. Bezeichne  $x$ , die Entfernung  $MB$  und  $\varepsilon$ , den Zwischenraum zwischen dem Punkte  $M$  und dem unmittelbar darunter belegenen, und es sei

$$\varepsilon \cdot \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{d\varepsilon}{dx} \right) = w,$$

dann ist klar, dass der Werth von  $F$ , aus dem von  $F$  wird abgeleitet werden können, wenn man in letzterem  $x$  und  $w$  bezüglich in  $x$ , und  $w$ , verwandelt. Vermöge der Gleichung (8) hat man mithin sodann

$$\begin{aligned} F, = & \frac{1}{w,} \cdot h - \frac{1}{2}f - a \cdot w, \cdot f^I + a^I \cdot w,^3 \cdot f^{III} - a^{II} \cdot w,^5 \cdot f^V + u. s. w. \\ & + \frac{w,}{2} \cdot \frac{d \left[ \frac{k}{w,^2} - a \cdot f + 3 a^I \cdot w,^2 \cdot f^{II} - 5 a^{II} \cdot w,^4 \cdot f^{IV} + \dots \right]}{dx,}. \end{aligned}$$

Auch geht aus der Bedeutung des  $\varepsilon$  und  $\varepsilon$ , hervor, dass, wenn man die bezüglichen Zwischenräume als Functionen von  $x$ , betrachtet, der Werth von  $\varepsilon$  aus dem von  $\varepsilon$ , hervorgehen wird, wenn man  $x, - \varepsilon$ , an die Stelle von  $x$ , setzt. Vernachlässigt man also alle diejenigen Grössen, welche in Bezug auf die Molekular-Zwischenräume von der zweiten Ordnung sind, so hat man

$$\varepsilon = \varepsilon, - \varepsilon, \cdot \frac{d\varepsilon}{dx,},$$

woraus wegen  $dx, = - dx$

$$w, = \varepsilon + \frac{1}{2} \cdot \frac{d\varepsilon}{dx,} = w$$



folgt. Zieht man also den Werth von  $F$ , von dem des  $F$  ab, so hat man

$$F - F' = \frac{w}{2} \cdot \frac{d\left(\frac{k}{w^2} - a.f + 3a'.w^2.f'' - 5a''.w^4.f^{iv} + \text{u. s. w.}\right)}{dx}$$

als Ausdruck für die Kraft, welche aus der Einwirkung aller übrigen materiellen Punkte auf den Punkt  $M$  entspringt, und welche diesen Punkt niederzudrücken oder höher zu heben das Bestreben haben wird, je nachdem sie positiv oder negativ ausfällt. Man kann nun in dem Ausdruck für  $w$  das Glied  $\frac{1}{2} \frac{d\varepsilon}{dx}$  im Vergleich zu der Zahl 1 vernachlässigen, wodurch dann  $w$  in  $\varepsilon$  übergeht.

Sei nun  $mX$  die gegebene Kraft, welche auf den Punkt  $M$  wirkt, positiv oder negativ, je nachdem sie in der Richtung  $MB$  oder  $MA$  sich äussert; wo  $m$  die Masse dieses ganz beliebigen Punktes und  $X$  eine Function von  $x$  bedeutet. Für das Gleichgewicht von  $M$  ist dann nöthig, dass

$$mX = F - F'$$

sei. Bezeichnet man nun die Dichtigkeit, welche in dem Punkte  $M$  statt hat mit  $\rho$ , das heisst, setzt man (nach dem Vorigen)

$$\rho = \frac{m}{\varepsilon},$$

und, der Abkürzung wegen,

$$p = \frac{k}{\varepsilon^2} - a.f + 3a'.\varepsilon^2.f'' - 5a''.\varepsilon^4.f^{iv} + \text{u. s. w.}, \quad (9)$$

so geht die vorherige Gleichung für das Gleichgewicht über in

$$\rho \cdot X = \frac{dp}{dx}. \quad (10)$$

Hierbei ist bemerkenswerth, dass wenn man in der Gleichung (1) das Glied, welches vom Quadrat von  $s$  abhängig ist, und die übrigen Glieder in dem Ausdruck für  $F$ , welche man in der vorigen Nummer vernachlässigt hat,



beibehalten hätte, sodann hieraus für den letztgenannten Ausdruck Glieder hervorgegangen sein würden, welche einen zweiten Differenzialquotienten oder zwei erste Differenzialquotienten (zum Product verbunden) in Bezug auf den Variablen  $x$ , d. h. Glieder enthalten hätten, welche durch  $dx^2$  dividirt waren. Diese Glieder würden jedoch in dem Ausdruck für  $F - F$ , verschwunden sein und mithin in den Gleichungen (9) und (10) keine Aenderung hervorgebracht haben.

Die von uns benutzten Werthe  $F$  und  $F$ , sind nicht mehr gültig, wenn der bezügliche Punkt  $M$  in einer Entfernung von  $A$  oder  $B$  liegt, welche geringer ist, als der Halbmesser der Molecular - Wirkungssphäre. In dem Falle z. B., wo die Entfernung  $BM$  kleiner ist, als jener Halbmesser, wird die Reihe (2) nicht mehr bis ins Unendliche sich erstreckend gedacht werden dürfen; ihr Werth, als eine Function von  $BM$  oder  $x$ , wird von der Form der Function  $f s$  abhängen und wird in den Grenzen von  $x, = 0$  bis dahin, wo  $x$ , einen irgend merklichen Werth hat, sehr schnell wechseln; dasselbe wird mithin auch in Bezug auf den Molecular - Zwischenraum stattfinden, welcher durch die Bedingung des Gleichgewichts für den Punkt  $M$  bestimmt wird.

10. Wir wollen nun die Wirkung berechnen, welche durch die materiellen Punkte eines Theils der geraden Linie  $AB$  auf diejenigen Punkte ausgeübt wird, welche dem angrenzenden Theil derselben Linie  $AB$  angehören, und wollen dabei annehmen, dass der Verbindungspunkt  $M$  dieser beiden Theile in merklicher Entfernung von den beiden Endpunkten  $A$  und  $B$  liege.

Sei also  $M$ , ein materieller Punkt, welcher in der Entfernung  $s$ , unterhalb  $M$ , und mithin in der Entfernung  $s + s$ , unterhalb  $M'$  liegt. Bezeichne  $V$  die gegenseitige Wirkung zweier beliebiger Punkte  $M$ , und  $M'$ . Nach dem, was in Nro. 4 gesagt worden ist, ist dann die allgemeinste Form des Ausdrucks für diese Kraft

$$V = F(s + s, \quad x + s, \quad x - s),$$

wo  $F$  eine Function bezeichnet, welche nur für unmerkliche Werthe von  $s + s$ , ihrerseits merkliche Werthe annimmt, welche ferner symmetrisch ist in Bezug auf die Binomien  $x + s$  und  $x - s$ , und welche man in einer



convergenten Reihe entwickeln kann, die nach den Potenzen und Producten von den zweiten Gliedern derselben fortschreitet. Wenn man daher diejenigen Grössen vernachlässigt, welche in Bezug auf  $s$  und  $s$ , von der zweiten Ordnung sind, und wenn man für irgend einen Variablen  $u$  die Bezeichnung

$$F(u, x, x) = fu$$

einführt, so hat man

$$V = f(s + s,) + \frac{1}{2}(s - s,) \cdot \frac{df(s + s,)}{dx}.$$

Sei nun  $n$ , die Anzahl der materiellen Punkte, welche die gerade Linie  $MM$ , enthält, mit Ausschluss des Punktes  $M$ , so wird der Werth von  $s$ , aus dem durch Gleichung (7) für  $s$  gegebenen hervorgehen, wenn man darin  $n, w, x$  in  $n,, w,, x$ , umwandelt, und da man  $w, = w, dx, = -dx$  hat, so wird man

$$s + s, = n.w + n,.w + \frac{1}{2}(n^2.w^2 - n,.^2.w^2).\lambda$$

haben. Das zweite Glied dieses Ausdrucks ist in Bezug auf  $s$  und  $s$ , von der zweiten Ordnung. Man wird daher  $f(s + s,)$  in eine nach Potenzen jenes Gliedes geordnete und convergente Reihe entwickeln können, und dadurch, wenn man von dieser Reihe nur die beiden ersten Glieder beibehält, und den Differenzialquotienten  $\frac{dfs}{ds}$  mit  $f's$  bezeichnet,

$$f(s + s,) = f(n.w + n,.w) + \frac{1}{2}(n^2.w^2 - n,.^2.w^2).\lambda.f'(n.w + n,.w)$$

erhalten. Für den hier beliebten Grad der Annäherung reicht es aus, in dem zweiten Gliede von  $V$ ,  $s = n.w$ ,  $s, = n,.w$ , zu setzen. Der vollständige Werth von  $V$  wird mithin durch

$$V = f(nw + n,w) + \frac{1}{2}(n^2w^2 - n,.^2w^2)\lambda f'(nw + n,w) + \frac{1}{2}(nw - n,w) \cdot \frac{df(nw + n,w)}{dx}$$

ausgedrückt sein.

Bezeichne nun  $q$  die Wirkung, welche durch alle oberhalb von  $M$  belegenen Punkte  $M'$  auf alle unterhalb von  $M$  belegenen Punkte  $M$ , ausgeübt



wird. Da der Punkt  $M$  vorausgesetztermaassen in merklicher Entfernung von  $A$  und  $B$  liegt, so haben wir

$$q = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V,$$

wo die beiden Summenzeichen  $\Sigma$  den ganzen Zahlen  $n$  und  $n$ , entsprechen. Nun leuchtet ein, dass alle diejenigen Glieder dieser Doppelsumme, welche von den beiden letzten Theilen von  $V$  herrühren, sich wegen des Gegensatzes der Vorzeichen zu zwei und zweien gegenseitig aufheben werden; man wird daher einfach

$$q = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f(n.w + n.w)$$

haben. Wenn man dann auf beiden Seiten dieser Gleichung noch  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n.w)$  hinzufügt, so wird man daraus

$$\begin{aligned} q + \sum_{n=1}^{\infty} f(n.w) &= fw + f2w + f3w + f4w + \text{u. s. w.} \\ &\quad + f2w + f3w + f4w + \text{u. s. w.} \\ &\quad + f3w + f4w + \text{u. s. w.} \\ &\quad + f4w + \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

oder, was dasselbe ist,

$$q + \sum_{n=1}^{\infty} f(n.w) = \frac{1}{w} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} [n.w \cdot f(n.w)]$$

ableiten können.

Setzt man aber in der Formel (4)  $s.fs$  und  $w$  bezüglich an die Stelle von  $fs$  und  $\varepsilon$ , so erhält man den Werth von  $\sum_{n=1}^{\infty} [n.w \cdot f(n.w)]$ , woraus dann

$$q + \sum_{n=1}^{\infty} f(n.w) = \frac{1}{w^2} \cdot \int_0^{\infty} s.fs.ds - a.f + 3a^1.w^2.f'' - sa''w^4.f^{IV} + \text{u. s. w.}$$

hervorgeht.

Nun kann man in dem Ausdruck für  $w$  das Glied  $\frac{1}{2} \frac{d\varepsilon}{dx}$  im Vergleich zur Zahl 1 vernachlässigen. Diess giebt  $w = \varepsilon$ , und mithin

$$q + \sum_{n=1}^{\infty} f(n.w) = p,$$

wo  $p$  ganz dasselbe bedeutet, wie vorhin. In Folge der Gleichung (8) ist aber die Summe  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n.w)$  von dem ganzen Werth für  $F$  nur um eine Grösse,



$\frac{w}{2} \cdot \frac{dp}{dx}$ , verschieden, welche im Vergleich zu  $p$  unmerklich ist. Vernachlässigt man daher diesen Unterschied, so wird  $q + \sum_{-\infty}^{\infty} f(n.w)$  die Wirkung sein, welche von allen Punkten, die über  $M$  liegen, auf alle diejenigen ausgeübt wird, die unter  $M$  liegen, d. h. die Kraft, welche bestimmt werden sollte. Diese Kraft ist mithin dieselbe wie  $p$ , wofür durch Gleichung (9) der Werth angegeben worden ist. Man wird bemerken, dass bei demjenigen Grade von Annäherung, bei welchem wir stehen geblieben sind, die Kraft, um welche es sich handelt, nicht, wie es bei der Kraft  $F$  der Fall war, von dem Wechsel der Materie und den Zwischenräumen zwischen den auf der geraden Linie  $AB$  befindlichen Punkten im Bereiche ihrer Wirkungssphäre abhängig ist.

11. Verlegt man den Punkt  $M$  in einen andern Punkt  $O$ , welcher ebenfalls in einer merklichen Entfernung von den Endpunkten der Linie  $AB$  liegt, setzt man  $AO = x - \gamma$ , und bezeichnet mit  $p$ , das, was unter diesen Umständen aus  $p$  wird, so hat man nach dem Taylorschen Satze

$$p_1 = p - \gamma \cdot \frac{dp}{dx} + \frac{1}{2} \gamma^2 \cdot \frac{d^2 p}{dx^2} - \text{u. s. w.},$$

und es wird dann  $p_1$  die Wirkung sein, welche von allen den Punkten, die über  $O$  liegen, auf  $O$  und alle diejenigen Punkte ausgeübt wird, die unterhalb  $O$  liegen. Die Wirkung von diesen auf die ersteren ist gleich und entgegengesetzt der Wirkung der ersteren auf die letzteren, ferner sind die entgegengesetzten Wirkungen, welche von den beiden Systemen von Punkten auf den Punkt  $O$  ausgeübt werden, nicht merklich von einander verschieden. Die Wirkung der unter  $O$  liegenden Punkte auf  $O$  und die darüber liegenden ist daher gleich und entgegengesetzt von  $p_1$ . Folglich ist  $p_1 - p$  die von unten nach oben gerichtete Kraft, welche auf den ganzen Theil  $MO$  der geraden Linie  $AB$  wirkt, und welche aus der Wirkung der anliegenden Theile entspringt.

Nimmt man die Länge  $\gamma$  sehr klein an, so dass man ihr Quadrat vernachlässigen kann, so hat man

$$p_1 - p = - \gamma \cdot \frac{dp}{dx}.$$



Zu gleicher Zeit kann man annehmen, dass die gegebene Kraft  $mX$  in der ganzen Ausdehnung der Länge  $\gamma$  constant und die auf  $MO$  wirkende Totalkraft gleich  $\gamma p X$  sei, wo, wie früher,  $p$  die Dichtigkeit im Punkte  $M$  bezeichnet. Für das Gleichgewicht dieses beliebigen Theils von  $AB$  ist es also nöthig, dass man

$$p, - p + \gamma p X = 0$$

habe, ein Resultat, was vermöge des oben für  $p, - p$  gefundenen Werthes mit dem der Gleichung (10) zusammenfällt.

Die Betrachtung der Kraft  $p$  führt aber ausserdem auch zu den besonderen Gleichgewichtsgleichungen, welche für die beiden Endpunkte von  $AB$  statt haben. Setzen wir zu dem Ende voraus, dass man auf die beiden Punkte  $A$  und  $B$  gegebene Pressungen wirken lasse; sei  $\Omega$  diejenige, welche auf  $A$  in der Richtung  $AB$ , und  $\Pi$  diejenige, welche auf  $B$  in der entgegengesetzten Richtung  $BA$  wirkt; verlegen wir sodann den Punkt  $M$  nach und nach in andere Punkte  $A'$  und  $B'$ , welche in Entfernungen von  $A$  und  $B$  liegen, die zwar unmerklich, aber demungeachtet grösser sind, als der Halbmesser der Wirkungssphäre. Dann wird es für das Gleichgewicht der äussersten Theile  $AA'$  und  $BB'$  der gegebenen Linie nöthig sein, dass man die nachstehenden beiden Gleichungen habe:

$$\Omega - p = 0 \quad \text{und} \quad \Pi - p = 0, \quad (11)$$

in welchen die unmerkliche Wirkung von  $mX$  ausser Acht gelassen ist, und in welchen in der ersten  $x = 0$ , in der zweiten aber  $x = l$  gesetzt ist, unter  $l$  die ganze Länge der geraden Linie  $AB$  verstanden.

In Folge der Gleichung (10) und der ersten der Gleichungen (11) wird man in jedem beliebigen Punkte dieser geraden Linie haben:

$$p = \Omega + \int p X dx, \quad (12)$$

das Integral so genommen, dass es mit  $x$  zugleich verschwinde. Vermöge der zweiten der Gleichungen (11) wird hieraus

$$\Pi - \Omega - \int_0^l p X dx = 0 \quad (13)$$



als Gleichung für das Gleichgewicht hervorgehen, welcher die gegebenen Kräfte genügen müssen, ein Resultat, was für sich klar ist. Ist diese Bedingung erfüllt, dann werden die Gleichungen (11) die Grösse der Molecular-Zwischenräume bestimmen, welche den Punkten  $A'$  und  $B'$  entsprechen und die Gleichung (10) wird die Aenderung derselben längs  $A'B'$  kennen lehren. Die folgende Nummer wird diess zeigen.

12. Um die Frage zu vereinfachen, wollen wir voraussetzen, dass der Zwischenraum  $\varepsilon$  zweier auf einanderfolgenden Punkte im Vergleich zu der Grösse merklicher Werthe von  $fs$  klein genug sei, um alle Glieder der Reihe (9) vom dritten an gerechnet, vernachlässigen zu können. Setzt man den in dieser Weise auf seine zwei ersten Glieder reducirten Werth von  $p$  in die zweite der Gleichungen (11) und überdem für  $\alpha$  seinen Werth  $\frac{1}{12}$ , so hat man

$$k - \frac{\varepsilon^2}{12} \cdot f = \Pi \cdot \varepsilon^2.$$

Wenn man voraussetzt, dass das Gleichgewicht zwischen den materiellen Punkten, welche auf der geraden Linie  $AB$  liegen und ihrer gegenseitigen Einwirkung unterworfen sind, bestehen könne, ohne dass man genöthigt sei, sie durch Druck von aussen darin zu erhalten, so ist dazu erforderlich, dass die Grössen  $k$  und  $f$  einerlei Vorzeichen haben. Setzt man sodann  $\Pi = 0$  und bezeichnet mit  $\beta$  denjenigen Werth, welcher unter diesen Umständen aus der vorstehenden Gleichung für  $\varepsilon$  folgt, so erhält man

$$\beta = 2\sqrt{\frac{3k}{f}}.$$

Wenn ausserdem  $X = 0$  ist, so wird dieser Werth von  $\beta$  in der ganzen Länge von  $A'B'$  statt haben und zwar wird derselbe im Falle der Homogenität für alle Punkte derselbe, d. h. constant sein, im Allgemeinen aber mit den Werthen von  $k$  und  $f$  wechseln, wenn die in Rede stehenden materiellen Punkte verschiedener Natur sind. Wir wollen annehmen, dass sie homogen seien, und  $X = 0$  setzen. Wenn man nun unter diesen Umständen und indem man die Kraft  $fs$  unverändert lässt, die gerade Linie  $AB$  mittelst einer gegebenen Kraft  $\Pi$  zusammendrückt, so dass ihre Länge  $l$  sich auf  $l(1-\delta)$



reducirt, so werden die Zwischenräume der materiellen Punkte sich in demselben Verhältniss ändern. Man wird daher  $\varepsilon = \beta \cdot (1 - \delta)$  haben und die Gleichung (14) wird

$$1 - \delta = \sqrt{\frac{f}{f + 12 \Pi}}$$

ergeben. Man hat hiernach die Werthe von  $\delta$ , wenn die von  $f$  und  $\Pi$  gegeben sind, und man sieht, dass  $f$  ein sehr grosses Vielfaches von  $\Pi$  sein muss, wenn  $\delta$ , welches die Zusammenziehung ausdrückt, ein sehr kleiner Bruch werden soll. Umgekehrt wird der Werth von  $f$ , welcher sich auf die Natur der längs der geraden Linie  $AB$  geordneten materiellen Punkte bezieht, bekannt sein, wenn die Werthe von  $\Pi$  und  $\delta$  es sind; der Werth von  $k$  aber wird nur aus dem von  $\beta$  abgeleitet werden können.

Wenn man nicht  $X = 0$  hätte, und die in Rede stehenden Punkte z. B. der Schwere unterworfen wären, so würde man aus den Gleichungen (11) und (12) folgern, dass der auf irgend einen beliebigen Punkt  $M$  bezügliche Werth von  $\varepsilon$  aus demjenigen, welcher für den Fall von  $X = 0$  statt hat, abgeleitet werden könne, wenn man  $\Pi$  um das Gewicht des über  $M$  liegenden Theils  $MB$  der besprochenen Linie  $AB$  vermehrt. Dies ist jedoch für sich klar.

13. Diese verschiedenen Resultate würden unmöglich sein, wenn man von dem Ausdruck für  $p$  nur das erste Glied beibehielte und alle übrigen unterdrückte, d. h., wenn die Summe, welche  $p$  repräsentirt, sich auf ein bestimmtes Integral reducirte. Aber wir haben schon in Nr. 7 bemerkt gemacht, dass eine solche Reduction nicht nothwendig statt hat, wenn die Function  $f_s$  aus mehreren Theilen mit verschiedenem Vorzeichen zusammengesetzt ist, obgleich die auf einander folgenden Unterschiede des Variabeln  $s$  ausserordentlich klein sein mögen, selbst unter Berücksichtigung der Unmerklichkeit der Strecke, innerhalb deren diese Function nur merkliche Werthe liefert. Nimmt man für  $f_s$  die Differenz zweier Functionen, welche nicht nach einem und demselben Gesetz abnehmen, so wird man den vorstehenden Resultaten ohne Schwierigkeit genügen und man wird diess in unzählig vielen verschiedenen Fällen nachweisen können; wir wollen uns jedoch auf das nachfolgende Beispiel beschränken, zu welchem man auch die aus Nr. 7 noch hinzufügen kann.



Bezeichne  $\alpha$  eine Linie von unmerklicher Grösse, so jedoch, dass der Quotient  $\frac{\alpha}{\varepsilon}$  eine sehr grosse Zahl sei. Setzen wir

$$fs = \frac{2b}{\alpha^2} e^{-\frac{s^2}{\alpha^2}} - \frac{b'}{\alpha^2} e^{-\frac{s}{\alpha}};$$

wo  $b$  und  $b'$  positive Constanten und  $e$  die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnen. Man hat sodann

$$k = b - b', \quad f = \frac{2b - b'}{\alpha^2}, \quad f'' = -\frac{4b + b'}{\alpha^4}, \quad \text{u. s. w.}$$

Ferner sei der Unterschied zwischen  $b$  und  $b'$  im Verhältniss zu jeder dieser Grössen sehr klein, und es sei  $b = b' + c$ , wo dann  $\frac{c}{b}$  ein sehr kleiner Bruch ist. Dann werden die vorstehenden Gleichungen ohne merklichen Fehler sich in diese andern verwandeln:

$$k = c, \quad f = \frac{b}{\alpha^2}, \quad f'' = \frac{5b}{\alpha^4}, \quad \text{u. s. w.}$$

Die Reihe (9) wird nun sehr convergent sein; alle Glieder derselben, vom dritten an gerechnet, werden schneller abnehmen als die geraden Potenzen von  $\frac{\varepsilon}{\alpha}$ , und wir werden uns mit ihren ersten zwei Gliedern begnügen können, wie wir diess in der vorigen Nummer gethan haben.

Der Werth  $\beta$  von  $\varepsilon$ , welcher dem Fall von  $\Pi = 0$  entspricht, und aus der Gleichung (14) folgt, ist dann

$$\beta = 2\alpha \sqrt{\frac{3c}{b}},$$

so dass also  $c$  positiv sein muss und  $\beta$  im Vergleich zu  $\alpha$  sehr klein sein wird, gerade wie wir es vorausgesetzt haben. Für irgend einen beliebigen Werth von  $\Pi$  wird sich  $\varepsilon$  in dem Verhältniss von  $\sqrt{b}$  zu  $\sqrt{b + 12\alpha^2\Pi}$  vermindern. Wenn daher der Druck  $\Pi$  im Verhältniss zu  $\frac{b}{\alpha^2}$ , dem Ausdruck für die Kraft  $fs$  im Falle von  $s = 0$ , sehr klein ist, so ist die durch diesen Druck bewirkte Verkürzung der geraden Linie  $AB$  sehr nahe



$$\delta = \frac{6\alpha \Pi}{b}$$

In diesem Beispiele ist die Molecularkraft aus zwei andern Kräften zusammengesetzt, von denen die eine abstossend, die andere anziehend wirkt, und von denen jede continuirlich von  $s = 0$  bis zu einem unmerklichen Werthe der Entfernung  $s$  abnimmt, bis sie auf dem eben genannten Grenzpunkte Null wird. Die abstossende Kraft nimmt schneller ab, als die anziehende. Die erstere übertrifft die andere von  $s = 0$  bis zu einem Werthe von  $s$ , für welchen beide Kräfte gleich sind, und welcher nahehin

$$s = \alpha \left( \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \log 2} \right)$$

ist. Jenseits dieser Entfernung überwiegt die Anziehung die abstossende Kraft. Es würde leicht sein, andere Beispiele zu geben, in welchen zuerst die Anziehung grösser ist als die Repulsion, später aber schneller abnimmt, als diese.

### §. III.

*Berechnung der Molecular-Pressungen in den elastischen (festen) Körpern; Differenzial-Gleichungen für das Gleichgewicht und die Bewegung dieser Körper.*

14. Wenn die verschiedenen Punkte eines Körpers weder den Wirkungen der Schwere noch irgend einer andern Kraft ausgesetzt sind und wenn nirgend ein äusserer Druck auf ihre Oberfläche wirkt, so muss die Mittelkraft (Resultante) aller repulsiven und attractiven Molecularwirkungen in jedem dieser Punkte gleich Null sein und die Entfernungen, so wie die gegenseitigen Stellungen der Molecüle müssen von der Art sein, dass sie dieser Bedingung entsprechen. Wenn man sodann auf diesen Körper gegebene Kräfte wirken lässt, so werden die Molecüle sich aus ihren ursprünglichen Stellungen verrücken; die Mittelkraft aller Molecularkräfte wird nicht mehr Null sein; in jedem Punkte wird sie der Mittelkraft aus den gegebenen Kräften das Gleichgewicht halten und jeder Theil des Körpers wird auf den ihm angrenzenden einen Druck ausüben, welcher aus den Molecu-



larkräften entspringt. Wir stellen uns die Aufgabe, diesen Druck zu berechnen und die Ortsverrückungen der Molecüle zu bestimmen, oder doch wenigstens die Differenzialgleichungen aufzustellen, von denen dieselben abhängen, indem wir annehmen, dass sie sehr klein seien und der Körper vollkommen elastisch. Unter letzterem versteht man einen Körper, welcher seine ursprüngliche Form wieder annimmt, und dessen Punkte sämmtlich zu ihren ursprünglichen Stellungen zurückkehren, sobald die gegebenen Kräfte, welche deren Verrückung bewirkten, aufgehört haben, thätig zu sein. Alle Körper haben diese Eigenschaft, sobald die Aenderung in der Form sehr klein ist; wenn letztere aber ein wenig beträchtlich ist, so behalten manche Körper die Form, welche die fremden Kräfte bewirkt hatten, ganz bei, oder sie kehren nur unvollkommen zu ihrer ursprünglichen Form zurück. In den nicht (vollkommen) elastischen Körpern kann die Form verschieden sein für einerlei gegebene Kräfte, oder dieselbe für verschiedene Kräfte. Wir werden uns in dieser Abhandlung nicht mit ihnen beschäftigen. Auch wird in diesem Paragraphen nur von nichtcrystallisirten elastischen Körpern die Rede sein und wir werden zunächst ihren natürlichen Zustand in Betracht ziehen, d. h. denjenigen, wenn die Molecüle einzig ihrer gegenseitigen Einwirkung unterworfen, fremde Kräfte oder Drucke aber nicht vorhanden sind.

15. Diesen Zustand vorausgesetzt, sei  $M$  ein Punkt, welcher im Innern des Körpers in merklicher Entfernung von seiner Oberfläche belegen ist. Denken wir uns durch diesen Punkt eine Ebene gelegt, welche den Körper in zwei Theile theilt, und denken wir uns die Lage dieser Ebene, der Anschaulichkeit wegen, horizontal. Sei  $A$  der obere und  $A'$  der untere Theil, und es mögen in dem letzteren auch diejenigen materiellen Punkte mit inbegriffen sein, welche der Theilungsebene angehören. Um den Punkt  $M$  als Mittelpunkt werde eine Kugel beschrieben, welche eine sehr grosse Anzahl von Molecülen enthalte, deren Halbmesser aber nichtsdestoweniger im Vergleich zum Halbmesser der Molecularwirkungssphäre unmerklich sei. Sei  $w$  der Durchschnitt dieser Kugel mit der Horizontalebene. Ueber genannter Durchschnittsfläche denke man sich in dem Theil  $A$  einen senkrechten Cylinder errichtet, der  $B$  heisse, und dessen Höhe wenigstens dem Halbmesser der Molecularwirkungssphäre gleich sei. Dann wird die Wirkung der Molecüle von  $A'$



auf die von  $B$ , wenn man sie durch  $w$  dividirt, den Druck von  $A'$  auf  $A$  darstellen, bezogen auf die Einheit der Fläche und bezüglich auf den Punkt  $M$ .

Bei der Berechnung dieser Kraft kann man nach Nro. 3 für die gegenseitige Wirkung zweier bestimmter Molecüle annehmen: einmal, dass ihre Richtung mit der geraden Linie zusammenfalle, welche die Schwerpunkte der Molecüle mit einander verbindet, und ferner, dass ihre Intensität eine Function der Entfernung dieser beiden Punkte sei. Seien daher:  $m$  der Schwerpunkt eines Molecüls von  $B$ ,  $m'$  der Schwerpunkt eines Molecüls von  $A'$ , so wie  $O$  und  $O'$  die Projectionen derselben auf die durch  $M$  geführte Horizontalebene. Sei

$mO = \xi$ ,  $m'O' = \xi'$ ,  $OO' = \lambda$ ,  
und sodann

$$\xi + \xi' = z, \quad z^2 + \lambda^2 = r^2,$$

so dass  $r$  die Länge von  $mm'$  bezeichnet.

Wir betrachten sodann die gegenseitige Wirkung der beiden Molecüle als eine Kraft, welche längs dieser geraden Linie wirkt, und bezeichnen ihre Intensität mit  $fr$ . Diese Function wird positiv oder negativ sein, jenachdem die ihr entsprechende Kraft repulsiv oder attractiv wirkt und wird nur für unmerkliche Werthe von  $r$  ihrerseits merkliche Werthe haben. Wenn der in Rede stehende Körper nicht homogen ist, so wird  $fr$  von der Natur der Molecüle abhängen und mit dem Orte der Punkte  $m$  und  $m'$  wechseln; aber dieser Wechsel wird im Bereich der Molecularwirkungssphäre unmerklich sein und wir werden bei der Berechnung der Pressungen, wenigstens in dem vorliegenden Falle der festen Körper, keine Rücksicht darauf nehmen. Hiernach wird nun, da um  $B$  herum alle Umstände sich gleich sind, die Wirkung von  $A'$  auf  $B$  sich auf eine verticale Kraft reduciren. Wir wollen dieselbe mit  $N.w$  bezeichnen, so dass  $N$  der auf die Einheit der Fläche bezogene Druck ist, und da die aus der Zerlegung von  $fr$  hervorgehende verticale Seitenkraft, welche im Punkte  $m$  von unten nach oben wirkt,  $\frac{z}{r}.fr$  ist, so haben wir

$$N.w = \Sigma \frac{z}{r} fr,$$



wo das Summenzeichen  $\Sigma$  sich auf alle Punkte  $m$  von  $B$  und  $m'$  von  $A'$  erstreckt.

16. Man kann die angedeutete Summation durch die nachfolgenden Betrachtungen vereinfachen.

Jedes Glied in der Summe  $\Sigma$ , welches sich auf die gegenseitige Wirkung irgend zwei beliebiger Punkte  $m$  und  $m'$  bezieht, ist offenbar mit demjenigen Ausdruck übereinstimmend, welcher der gegenseitigen Einwirkung zwischen dem Punkte  $M$  und einem solchen Punkte  $M'$  von  $A'$  entsprechen würde, für welchen man

$$MP = \lambda, \quad M'P = z, \quad MM' = r$$

hätte, wo  $P$  die Projection des Punktes  $M'$  auf die durch  $M$  geführte Horizontalebene bezeichnet. Wir wollen uns nun unter  $\lambda$  und  $z$  bestimmte Werthe denken und das Summenzeichen  $\Sigma$  auf alle materiellen Punkte aller derjenigen Horizontaldurchschnitte von  $B$  ausdehnen, deren senkrechte Höhe über  $A'$  nicht grösser ist als  $z$ , d. h. auf alle die Punkte, welche in einem Volumen  $wz$  begriffen sind, mit Ausschluss derjenigen, welche der Grundfläche  $w$  angehören. Nennen wir die Anzahl dieser Punkte  $v$ , so wird die besprochene Theilsumme gleich  $\frac{vz}{r} fr$  sein, und man wird daher

$$N \cdot w = \Sigma \frac{vz}{r} fr$$

haben, wo nun das Summenzeichen  $\Sigma$  sich auf alle Punkte  $M'$  von  $A'$  erstreckt.

Wir werden die Zahl  $v$  als dem Volumen  $wz$  proportional betrachten, was erlaubt ist, weil die Schnittfläche  $w$  vorausgesetztmaassen eine sehr grosse Anzahl materieller Punkte enthält, obgleich übrigens die Molecüle in diesem Volumen ganz unregelmässig vertheilt sein können. Sei nun  $\varepsilon$  eine Linie von constanter Länge, und sei

$$v = \frac{wz}{\varepsilon^3}.$$

Unterdrückt man nun den Factor  $w$ , welcher in beiden Gliedern der obigen Gleichung vorkommen wird, so haben wir

$$N = \frac{1}{\varepsilon^3} \Sigma \frac{z^2}{r} fr. \quad (1)$$



Das Symbol  $\varepsilon$  wird die mittlere Grösse der Molecularzwischenräume um den Punkt  $M$  herum bezeichnen (Nro. 1). Bedeutet nun  $\mu$  die Masse eines Molecüls, oder vielmehr die mittlere Grösse derselben, so wird die Masse des Cylinders gleich  $v\mu$  sein und der Quotient  $\frac{v\mu}{wz}$  wird die Dichtigkeit ausdrücken. Bezeichnet man diese daher mit  $\rho$ , so hat man

$$\rho = \frac{\mu}{\varepsilon^3}.$$

Es genügt, dass die Molecularwirkungssphäre nach der Hypothese von Nro. 3 eine sehr grosse Anzahl von Molecülen in sich begreife, um die in der Gleichung (1) enthaltene Summe als eine Function von  $\varepsilon$  ansehen zu können, welche in sich völlig bestimmt und von der Unregelmässigkeit der Vertheilung der Molecüle in dem Bereiche der genannten Wirkungssphäre unabhängig ist. Man kann dabei zwei verschiedene Theile unterscheiden: der eine ist eine Halbkugel, welche von dem Mittelpunkte  $M$  aus mit dem Halbmesser  $h$  in  $A'$  beschrieben worden ist und der andere Theil ist der Rest von  $A'$ . Bezeichnen wir mit  $H$  den Werth des ersteren Theils und bezieht sich das Summenzeichen  $\Sigma'$  auf den zweiten Theil, so hat man zunächst

$$\Sigma \frac{r^2}{r} fr = \Sigma' \frac{r^2}{r} fr + H.$$

Wenn man nun aber für  $h$  eine Linie nimmt, die im Verhältniss zu  $\varepsilon$  sehr gross ist, so wird sich auch das Summenzeichen  $\Sigma'$  nur auf Werthe dieser Art von  $r$  beziehen und man wird sodann die bezügliche Summe auf eine einfache Summe zurückführen können, die sich auf den genannten Veränderlichen bezieht.

Indem ich nun noch voraussetzte, dass der Halbmesser  $h$  im Vergleich zu dem Halbmesser der Molecularwirkungssphäre unmerklich sei, habe ich in meinen früheren bezüglichen Abhandlungen den Theil  $H$  im Vergleich zur ganzen Summe ebenfalls als unmerklich angesehen. Diess würde auch ohne Schwierigkeit geschehen können, wenn  $fr$  in den Grenzen, innerhalb deren die Summation geschieht, sein Vorzeichen nicht änderte. Da aber in der Natur diese Function die Differenz zweier Grössen von entgegengesetzten Vorzeichen ist, so kann es begreiflicherweise geschehen, dass  $H$  im Vergleich zu dem Werthe von  $\Sigma'$  einen erheblichen Werth haben kann.



Aus diesem Grunde werde ich das Summenzeichen  $\Sigma$  in der Bedeutung beibehalten, wie sie der Gleichung (1) in dieser Nummer zum Grunde gelegt ist, und wonach es sich nur auf alle materiellen Punkte von  $A'$  bezieht.

17. Nun sei  $U$  irgend eine beliebige Function der Coordinaten von  $M'$ , deren Anfangspunkt in  $M$  sei, und welche der äussersten Ebene von  $A'$  und einem auf dieser Ebene errichteten Perpendikel parallel genommen werden. Betrachtet man nun den Körper in der Ausdehnung der merklichen Werthe von  $fr$  als homogen, und sind seine Molecüle nicht in besonderer Weise um den Punkt  $M$  herum vertheilt, so leuchtet ein, dass die Summe  $\Sigma Ufr$ , ausgedehnt auf alle Punkte  $M'$  von  $A'$ , als unabhängig angesehen werden kann von der Richtung der durch  $M$  geführten Ebene, welche  $A'$  begrenzt. Wendet man diese Bemerkung auf die in der Gleichung (1) der vorigen Nummer enthaltene Summe an und giebt man der durch  $M$  gehenden Ebene nach und nach verschiedene Richtungen, so sieht man, dass der Druck  $N$  nach allen Richtungen um jenen Punkt herum derselbe bleibt. Er wirkt normal auf die genannte Ebene und ist von Aussen nach dem Innern von  $A$  oder von Innen nach Aussen gerichtet, jenachdem sein Werth positiv oder negativ ist.

Da der Summande  $\frac{x^2}{r} fr$  für alle Punkte der durch  $M$  geführten Ebene Null ist, so sieht man auch, dass die in Rede stehende Summe die Hälfte derjenigen ist, welche sich auf alle Punkte von  $A$  und  $A'$  erstreckt. Da ferner  $r^2$  die Summe der Entfernungen ist, in denen der Punkt  $M'$  von drei durch den Punkt  $M$  gelegten rechtwinkligen Coordinatenebenen sich befindet, und da die Summe  $\Sigma \frac{x^2}{r} fr$  ungeändert bleibt, wenn man darin für  $x^2$  nach und nach jede der beiden andern Variabeln, ins Quadrat erhoben, setzt, so folgt, dass jene Summe dem Drittel von  $\Sigma \frac{r^2}{r} fr$  gleich ist. Hiernach hat man also

$$N = \frac{1}{6\pi^3} \Sigma rfr, \quad (2)$$

wo das Summenzeichen  $\Sigma$  sich auf alle diejenigen materiellen Punkte des Körpers bezieht, welche in der Wirkungssphäre von  $M$  liegen.



Sei  $M$ , ein Punkt von  $B$ , welcher in merklicher Entfernung unter  $A'$  liegt, und sei durch jenen Punkt eine Horizontalebene gelegt. Seien  $C$  und  $C + D$  die Theile von  $B$  und  $A$ , welche zwischen den durch  $M$  und  $M'$  gelegten Parallelebenen liegen und bezeichne  $N$ , den Werth von  $N$  in Bezug auf den Punkt  $M$ . Die Molecularkräfte, welche auf den Cylinder  $C$  wirken, sind dann: der Druck  $Nw$ , den seine untere, so wie der Druck  $N,w$ , den in entgegengesetzter Richtung seine obere Grundfläche erleidet, und eine aus der Wirkung von  $D$  entspringende Verticalkraft, welche wir dem ersteren Druck hinzufügen und mit  $V$  bezeichnen wollen. Für das Gleichgewicht von  $C$  muss sodann sein

$$wN + V = wN,$$

Nun sieht man aber leicht, dass  $V = 0$  ist. Denn man theile  $C$  und  $D$  in gleiche Theile von unmerklicher Ausdehnung, deren jeder einzelne jedoch eine sehr grosse Anzahl von Molecülen in sich begreift, und seien nun  $m$  und  $m'$  zwei Punkte von  $C$  und  $D$ , welche in gleicher Höhe  $v$  über  $A'$  liegen, so wie  $m$ , und  $m'$  zwei andre Punkte, die mit  $m$  und  $m'$  bezüglich in einerlei Verticalen und in einer anderen, aber wiederum gleichen Höhe  $v$ , über  $A'$  liegen, auch bezeichne  $u$  die Entfernung zwischen beiden Verticalen; dann wird die gegenseitige Wirkung der beiden Theile von  $C$  und  $D$ , welche den Punkten  $m$ , und  $m'$  entsprechen, von der Materie des Körpers und der Grösse  $\varepsilon$  des um jene Punkte herum stattfindenden Molecularzwischenraumes abhängen und durch  $\varphi(u, v, v,)$  dargestellt werden können. Da nun diese Function in Bezug auf  $v$  und  $v$ , symmetrisch ist, so wird die Wirkung der dem  $m$  und  $m'$ , entsprechenden Theile, ebenfalls  $\varphi(u, v, v,)$ , oder der ersteren gleich sein. Ueberdiess leuchtet ein, dass die durch Zerlegung jener beiden Kräfte entstehenden verticalen Seitenkräfte in, einander, entgegengesetzten Richtungen auf die Theile von  $C$  wirken und sich mithin gegenseitig aufheben werden. Ganz dasselbe wird in Bezug auf alle übrigen Theile von  $C$  und  $D$  stattfinden. Die Totalkraft  $V$  wird also Null, folglich  $N, = N$  sein, und der Druck  $N$  wird mithin von dem einen Punkte im Innern des Körpers zum andern sich nicht ändern.



Endlich kann man nachweisen, dass dieser Druck gleich Null ist. Zu diesem Behufe nehme man den Punkt  $M$  in einer Entfernung von der Oberfläche an, welche noch merklich, aber sonst so klein ist, als man immer will, und denke sich, dass die Axe von  $B$  senkrecht auf der die Oberfläche berührenden Ebene sei. Die vorhergehende Gleichung wird dann noch für das Gleichgewicht desjenigen Theils von  $B$  giltig sein, welcher zwischen der Oberfläche des Körpers und der Ebene liegt, die  $A'$  begrenzt und die Kraft  $N$ , welche sich auf das innere Ende jenes Theils bezieht, wird dieselbe sein, wie in jedem anderen Punkte des Körpers, weil  $M$  in merklicher Tiefe unter der Oberfläche angenommen worden ist. An die Stelle der Kraft  $N$ , wird sodann der normale und gegebene Druck gesetzt werden müssen, welcher möglicherweise auf die Oberfläche wirkt, und da dieser äussere Druck vorausgesetztermaassen Null ist, so ist mithin ebenfalls  $N = 0$ . Endlich mag immerhin die Grösse von  $\varepsilon$  in der normalen Richtung sehr schnell sich ändern, so wird diess doch, dem Vorigen zufolge, nicht verhindern, dass man  $V = 0$  und mithin auch  $N = N' = 0$  habe.

Daraus geht hervor, dass die Bedingung des natürlichen Zustandes jedes Körpers durch die Gleichung

$$\sum rfr = 0$$

ausgedrückt wird, wo die letztere zugleich die Grösse von  $\varepsilon$  für jeden in merklicher Entfernung von der Oberfläche befindlichen Punkt  $M$  in impliciter Weise bestimmt. Ich sage, in *impliciter* Weise, denn da die Form von  $fr$  nicht bekannt ist und die Summation nicht bewirkt werden kann, so wird es unmöglich sein, aus dieser Gleichung den numerischen Werth von  $\varepsilon$  abzuleiten, wie diess in den Beispielen des vorigen Paragraphen geschah. Wenn der Körper homogen ist und durchweg gleiche Temperatur hat, so werden dieser mittlere Zwischenraum und die Dichtigkeit  $\rho$  constante Grössen sein; ist der Körper aber heterogen, so werden  $\varepsilon$  und  $\rho$  mit der Stelle des Punktes  $M$  wechseln und in jedem besonderen Falle gegebene Functionen der Coordinaten dieser Stelle sein.

18. Untersuchen wir nun den Fall eines Körpers, dessen Theile sich, wenn auch noch so wenig, verrückt haben und dessen Form sich sowohl durch die



Wirkung innerer Kräfte als auch durch äussere Drucke geändert hat, welche an seiner Oberfläche angebracht sind.

Sei, wie immer,  $M$  ein materieller Punkt des Körpers, welcher in merklicher Entfernung von dessen Oberfläche liegt. Seien  $x, y, z$  die drei rechtwinkligen Coordinaten desselben für den natürlichen Zustand des Körpers und  $x + u, y + v, z + w$  dasjenige, was in dem folgenden Zustande des Körpers aus ihnen wird, wo  $u, v, w$  Functionen von  $x, y, z$  sind, welche allen inneren Punkten des Körpers entsprechen. Bezeichnen wir ferner mit  $x + x', y + y', z + z'$  die ursprünglichen und mit  $x + x' + u', y + y' + v', z + z' + w'$  die späteren Coordinatenwerthe eines andern Punktes  $M'$ , welcher in der Wirkungssphäre von  $M$  liegt. Da die Variabeln  $x', y', z'$  alsdann von unmerklicher Grösse sind, so werden wir in den Entwicklungen von  $u', v', w'$  nur die ersten Potenzen von jenen beibehalten und einfach haben:

$$\left. \begin{aligned} u' &= u + x' \cdot \frac{du}{dx} + y' \cdot \frac{du}{dy} + z' \cdot \frac{du}{dz}, \\ v' &= v + x' \cdot \frac{dv}{dx} + y' \cdot \frac{dv}{dy} + z' \cdot \frac{dv}{dz}, \\ w' &= w + x' \cdot \frac{dw}{dx} + y' \cdot \frac{dw}{dy} + z' \cdot \frac{dw}{dz}. \end{aligned} \right\} (3)$$

Für den ursprünglichen Zustand des Körpers bezeichne  $r$  die Länge der geraden Linie  $MM'$ , und  $\alpha, \beta, \gamma$  seien die Winkel, welche dieselbe mit geraden Linien macht, die parallel zu den Axen der  $x, y, z$  durch den Punkt  $M$  gelegt sind, so dass man hat

$$x' = r \cdot \cos \alpha, \quad y' = r \cdot \cos \beta, \quad z' = r \cdot \cos \gamma.$$

Bezeichne  $r', \alpha', \beta', \gamma'$  dasjenige, was aus jener geraden Linie und jenen Winkeln für dieselben beiden Punkte  $M$  und  $M'$  wird, nachdem ihre Stellen verrückt sind, dann ist

$$\cos \alpha' = \frac{x' + u' - u}{r'}, \quad \cos \beta' = \frac{y' + v' - v}{r'}, \quad \cos \gamma' = \frac{z' + w' - w}{r'},$$

und zu gleicher Zeit

$$r'^2 = r^2 + 2x'(u' - u) + 2y'(v' - v) + 2z'(w' - w) + (u' - u)^2 + (v' - v)^2 + (w' - w)^2.$$



In Folge der Gleichungen (3) und der Werthe von  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  wird der Veränderliche  $r$  in den Ausdrücken für  $\cos \alpha'$ ,  $\cos \beta'$ ,  $\cos \gamma'$  verschwinden und die Winkel  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$  werden nur von den Coordinaten von  $M$  und den Winkeln  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  abhängen; daraus folgt dann, dass alle materiellen Punkte, welche sich ursprünglich auf einer geraden Linie  $MM'$  befanden, welche zwei gegebene Punkte verbindet, auch nach der Ortsverrückung der letzteren sich noch auf derselben geraden Linie befinden werden. Folglich wird die, bald positive, bald negative Verhältnisszahl  $\frac{r' - r}{r}$  die lineare Ausdehnung oder Zusammenziehung des Körpers nach jeder beliebigen Richtung  $MM'$  um den Punkt  $M$  herum kennen lehren, wenn man darin für  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  diejenigen Winkel setzt, welche der gegebenen Richtung entsprechen.

Alle die materiellen Punkte, welche ursprünglich einer ebenen Fläche von unmerklicher Ausdehnung angehörten, werden nach der Ortsveränderung wiederum sämmtlich in einer ebenen Fläche liegen. Diess folgt augenscheinlich aus derselben Eigenschaft, welche jeder geraden Linie zukommt, die in einer solchen ebenen Fläche liegt. Die Lage dieser Ebene und die Form ihres Umfanges aber werden im Allgemeinen sich ändern. Wenn man also in dem natürlichen Zustande des Körpers ein rechtwinkliges Parallelepipedum in demselben näher betrachtet, für welches  $M$  einer seiner Winkelpunkte ist, und dessen drei anliegende Seitenflächen von unmerklicher Ausdehnung den drei Coordinatenebenen der  $x$ ,  $y$ ,  $z$  parallel liegen, so werden in dem spätern Zustande des Körpers die Kanten jenes Parallelepipedums immer noch geradlinig und seine Seitenfläche eben geblieben sein und jede der letzteren wird dieselben materiellen Punkte, wie in dem ursprünglichen Zustande enthalten. Auch wird sein Volumen dieselben materiellen Punkte wie vorher behalten, nur wird es sich in ein schiefwinkliges Parallelepiped verwandeln, dessen Seitenflächen mithin den Coordinaten-Ebenen nicht mehr parallel sein werden. Berechnet man nach den Ortsveränderungen der Winkelpunkte das neue Volumen des Körpers, und vergleicht dasselbe mit dem ursprünglichen Volumen, so wird man dadurch die kubische Ausdehnung oder Zusammenziehung des Körpers im Punkte  $M$  erfahren. Setzt man sodann voraus, dass dieses Volumen eine sehr grosse Anzahl von Molecülen enthalte, so



wird man die Aenderung der Dichtigkeit und des Molecular-Zwischenraumes in demselben Punkte  $M$  herleiten können. Wir wollen diese allgemeinen Betrachtungen auf den Fall anwenden, wo das gegenseitige Ausweichen oder die Annäherungen der Molecüle nur sehr klein sind.

19. In diesem Falle ist es erforderlich, dass die Grössen  $u' - u$ ,  $v' - v$ ,  $w' - w$  im Verhältniss zu den Veränderlichen  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  sehr klein, und mithin, wie man aus den Gleichungen (3) ersieht, die Partial-Differentialquotienten  $\frac{du}{dx}$ ,  $\frac{dv}{dy}$ , u. s. w. sehr kleine Brüche seien. Hier und in der ganzen fernerer Folge dieser Abhandlung wollen wir die Glieder der zweiten und der höheren Ordnungen in Bezug auf diese neun Grössen vernachlässigen. Sodann werden wir

$$r' = r + \frac{x'}{r} (u' - u) + \frac{y'}{r} (v' - v) + \frac{z'}{r} (w' - w)$$

haben und zufolge der Werthe  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  und der Gleichungen (3) daraus schliessen, dass der Ausdruck für die lineare Ausdehnung im Punkte  $M$  nach der durch die Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  bestimmten Richtung  $MM'$  der nachfolgende ist:

$$\begin{aligned} \frac{r' - r}{r} = & \frac{du}{dx} \cos^2 \alpha + \frac{dv}{dy} \cos^2 \beta + \frac{dw}{dz} \cos^2 \gamma + \left( \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right) \cos \alpha \cdot \cos \beta \\ & + \left( \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} \right) \cos \alpha \cdot \cos \gamma + \left( \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \right) \cos \beta \cdot \cos \gamma. \end{aligned} \quad (4)$$

Denken wir uns den Körper in seinem natürlichen Zustande und seien  $l$ ,  $l'$ ,  $l''$  die drei Seiten eines rechtwinkligen Parallelepipeds, welche im Punkte  $M$  zusammenstossen und bezüglich den Axen der  $x$ ,  $y$ ,  $z$  parallel sind. Seien  $\lambda$ ,  $\lambda'$ ,  $\lambda''$  die Längen derselben nach geschehener Ortsverrückung der materiellen Punkte, welche sie enthalten. Die Werthe von  $\lambda$ ,  $\lambda'$ ,  $\lambda''$  werden unmittelbar aus dem für  $r'$  folgen; man wird z. B. den Werth für  $\lambda$  haben, wenn man  $r = l$ ,  $\cos \alpha = 1$ ,  $\cos \beta = 0$ ,  $\cos \gamma = 0$  setzt. Es wird mithin sein,

$$\lambda = l \left( 1 + \frac{du}{dx} \right), \quad \lambda' = l' \left( 1 + \frac{dv}{dy} \right), \quad \lambda'' = l'' \left( 1 + \frac{dw}{dz} \right).$$



Das Volumen des Parallelepipedums wird man erhalten, wenn man das Product  $\lambda\lambda'\lambda''$  aus seinen drei Seiten mit dem Sinus des zwischen  $\lambda$  und  $\lambda'$  enthaltenen Winkels und mit dem Sinus des Neigungswinkels der ersten Seite  $\lambda$  gegen die Ebene der andern beiden Seiten multiplicirt. Diese Winkel aber sind ursprünglich rechte und ihre folgenden Werthe werden von einem rechten Winkel nur um eine Grösse verschieden sein, die in Bezug auf  $\frac{du}{dx}$ ,  $\frac{dv}{dy}$ , u. s. w. von der ersten Ordnung ist; ihre Sinus werden sich daher von der Einheit nur um eine Grösse der zweiten Ordnung unterscheiden. Das Volumen wird sich also auf das Product  $\lambda\lambda'\lambda''$  reduciren, dessen Näherungswerth dann der nachfolgende ist:

$$l l' l'' \left( 1 + \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right).$$

Bezeichnet man mit  $\rho'$  und  $\varepsilon'$  die Dichtigkeit und den mittlern Zwischen-Raum der Molecüle in dem späteren Zustande des Körpers, während sie in dessen natürlichem Zustande  $\rho$  und  $\varepsilon$  waren, und beachtet man, dass die Zahl und die Massen der in dem Parallelepipedum eingeschlossenen Molecüle sich nicht geändert haben, so wird man hieraus

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{\varepsilon^3}{\varepsilon'^3} = \frac{l l' l''}{\lambda \lambda' \lambda''}$$

folgern, woraus dann

$$\rho' = \rho \left( 1 - \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy} - \frac{dw}{dz} \right) \text{ und}$$

$$\varepsilon' = \varepsilon \left[ 1 + \frac{1}{3} \left( \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right) \right]$$

hervorgeht.

Die Flächeninhalte der drei Seitenflächen des schiefwinkligen Parallelepipedums, welche an den Punkt  $M$  angrenzen, werden durch die Producte  $\lambda'\lambda''$ ,  $\lambda\lambda''$ ,  $\lambda\lambda'$  ausgedrückt sein und man wird

$$\lambda'\lambda'' = l l'' \left( 1 + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right),$$

$$\lambda\lambda'' = l l'' \left( 1 + \frac{du}{dx} + \frac{dw}{dz} \right),$$



$$\lambda \lambda' = ll' \left( 1 + \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} \right)$$

haben. Auch die Richtungen derselben lassen sich angeben. Denn, wenn man in dem Punkte  $M$  drei Normalen auf jene drei Flächen errichtet und sodann die Winkel, welche die Fläche  $(\lambda', \lambda'')$  mit den Axen der  $x, y, z$ , macht, mit  $m, n, p$ ; die Winkel, welche die Fläche  $(\lambda, \lambda'')$  mit denselben Axen macht, mit  $m', n', p'$ ; und die Winkel, welche die Fläche  $(\lambda, \lambda')$  mit jenen Axen einschliesst, mit  $m'', n'', p''$  bezeichnet, so findet man ohne Schwierigkeit

$$\left. \begin{aligned} \cos m &= 1 & \cos n &= -\frac{du}{dy}, & \cos p &= -\frac{du}{dz}, \\ \cos m' &= -\frac{dv}{dx}, & \cos n' &= 1, & \cos p' &= -\frac{dv}{dz}, \\ \cos m'' &= -\frac{dw}{dx}, & \cos n'' &= -\frac{dw}{dy}, & \cos p'' &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Diese verschiedenen Resultate sind rein geometrisch und unabhängig sowohl von den gegebenen Kräften, welche auf den Körper wirken als auch von der gegenseitigen Einwirkung seiner Molecüle. Es handelt sich jetzt darum, die Drucke zu berechnen, welche von einem Theil des Körpers auf den angrenzenden Theil ausgeübt werden, wenn die Ortsverrückung der verschiedenen Punkte stattgehabt hat. Hieraus werden wir dann die Gleichungen für das Gleichgewicht folgern.

20. Durch den Punkt  $M$  führe man drei neue rechtwinklige Coordinaten-Axen. Seien  $x, y, z$ , die ursprünglichen Coordinaten des Punktes  $M'$ , bezogen auf diese Axen, so werden wir

$$\left. \begin{aligned} x' &= ax + by - cz, \\ y' &= a'x + b'y - c'z, \\ z' &= a''x + b''y - c''z, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

haben, wo die neun Coefficienten  $a, b$ , u. s. w. die Cosinus derjenigen Winkel sind, welche die Axen der  $x$ , und  $y$ , und die Verlängerung der



Axe der  $z$ , mit den Axen der  $x$ ,  $y$ ,  $z$  einschliessen. Die gegenseitigen Relationen dieser Cosinus sind bekannt.

Mögen  $A$  und  $A'$  die beiden Theile des Körpers bezeichnen, welche in seinem natürlichen Zustande durch die Ebene der  $x$ , und  $y$ , begrenzt werden;  $A'$  sei derjenige dieser beiden Theile, in welchem die positive Seite der Axe der  $z$ , befindlich ist, und zu welchem zugleich die materiellen Punkte der Ebene der  $x$ , und  $y$ , selbst mitgerechnet werden. Sei  $w$  der Flächeninhalt eines Theils dieser Ebene, welcher den Punkt  $M$  enthält und dessen Abmessungen im Vergleich zum Halbmesser der Molecular-Wirkungssphäre zwar unmerklich sind, der aber nichtsdestoweniger eine überaus grosse Anzahl materieller Punkte enthalten kann. In dem natürlichen Zustande des Körpers werde über  $w$  ein Cylinder errichtet, welcher senkrecht gegen  $A'$ , dabei in  $A$  enthalten ist, und  $B$  heisse. Wenn man unter diesen Verhältnissen in  $B$  einen Schnitt führt, welcher parallel der Grundfläche geht und dessen durch  $h$  dargestellte Entfernung von letzterer unmerklich ist, so wird die Anzahl der in dem Volumen  $wh$  enthaltenen Molecüle, mit Ausschluss derjenigen, welche der Grundfläche  $w$  angehören, durch  $\frac{wh}{\varepsilon^3}$  ausgedrückt werden können, wo  $\varepsilon$ , wie früher, die mittlere Grösse der Molecular-Intervallen für den Punkt  $M$  bezeichnet. Wenn die Molecüle verrückt worden sind, so werden der Cylinder  $B$  und dessen Grundfläche ihre Richtungen verändert haben, beide aber werden vor wie nach dieselben materiellen Punkte enthalten. Bezeichnen wir nun die drei, bezüglich den Axen der  $x$ ,  $y$ ,  $z$  parallelen Seitenkräfte, welche aus der Zerlegung der Wirkung entstehen, die in dem zweiten Zustande des Körpers von allen Molecülen in  $A'$  auf alle Molecüle in  $B$  ausgeübt wird, mit  $wP$ ,  $wQ$ ,  $wR$ , so wird die Aufgabe darin bestehen, die Werthe der Coefficienten  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  zu berechnen.

Sei nun  $m$  ein Punkt von  $B$  und  $m'$  ein Punkt von  $A'$ ; seien ferner in dem ursprünglichen Zustande des Körpers  $\eta$ ,  $\xi$ ,  $\zeta$  die Coordinaten von  $m$ , bezogen auf die Axen der  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , und  $\eta + x$ ,  $\xi + y$ ,  $\zeta + z$ , die des Punktes  $m'$ , so werden die Coordinaten der Punkte  $m'$  und  $m$  beziehlich dieselben sein, wie die für  $M$  und  $M'$ , und es wird mithin die Linie  $mm'$  dieselbe sein, wie  $r$ , ehe die Verrückung von  $m$  und  $m'$  stattgefunden hat. Wenn man nun die



Gleichungen (6) und (3) nach und nach auf diese beiden Punkte angewendet, so wird man daraus deren Coordinaten in den beiden aufeinanderfolgenden Zuständen des Körpers kennen lernen. Bezeichnet man sodann mit  $r$ , ihre gegenseitige Entfernung in dem zweiten Zustande des Körpers, während  $r$  dasselbe für den ersten Zustand ist, und setzt man der Abkürzung wegen

$$ax, + by, - cz, = \varphi,$$

$$a'x, + b'y, - c'z, = \psi,$$

$$a''x, + b''y, - c''z, = \theta,$$

$$\varphi \frac{du}{dx} + \psi \frac{du}{dy} + \theta \frac{du}{dz} = \varphi',$$

$$\varphi \frac{dv}{dx} + \psi \frac{dv}{dy} + \theta \frac{dv}{dz} = \psi',$$

$$\varphi \frac{dw}{dx} + \psi \frac{dw}{dy} + \theta \frac{dw}{dz} = \theta',$$

so hat man

$$r^2 = (\varphi + \varphi')^2 + (\psi + \psi')^2 + (\theta + \theta')^2.$$

Zu gleicher Zeit wird man

$$\frac{\varphi + \varphi'}{r}, \quad \frac{\psi + \psi'}{r}, \quad \frac{\theta + \theta'}{r}$$

als Werthe für die Cosinus derjenigen Winkel haben, welche die gerade Linie  $mm'$  in dem zweiten Zustande des Körpers mit den Axen der  $x, y, z$  einschliesst. Da nun die gegenseitige Wirkung irgend zweier beliebiger Molecüle dieselbe ist, wie in Nro. 15, so wird man für die Seitenkräfte, welche aus der Zerlegung der Totalwirkung von  $A'$  auf  $B$  entstehen, nachstehende Werthe haben

$$wP = - \sum \frac{\varphi + \varphi'}{r} fr,; \quad wQ = - \sum \frac{\psi + \psi'}{r} fr,; \quad wR = - \sum \frac{\theta + \theta'}{r} fr,;$$

wo das Summen-Zeichen  $\Sigma$  auf alle Punkte  $m'$  in  $A'$  und auf alle Punkte  $m$  in  $B$  zu beziehen ist. Da die Function  $fr$ , als positiv oder negativ betrachtet wird, jenachdem die dadurch dargestellte Kraft in der Entfernung



$r$ , zurückstossend oder anziehend wirkt, so werden jene Seitenkräfte nach der Richtung der positiven  $x$ ,  $y$ ,  $z$  oder in entgegengesetztem Sinne wirken, je nachdem ihre vorstehenden Werthe positiv oder negativ sind.

Man wird sich von den angezeigten Summationen eine genaue und leicht aufzufassende Idee bilden, wenn man sich denkt, die Punkte  $m$  und  $m'$  wären an ihren ursprünglichen Stellen geblieben und es hätte sich die gegenseitige Wirkung zweier beliebiger Punkte in eine Kraft umgewandelt, deren drei Seitenkräfte diejenigen Functionen ihrer Coordinaten wären, welche durch die unter den Summenzeichen enthaltenen Grössen ausgedrückt sind. Die Summenzeichen bedeuten dann sechsfache Summen, bezüglich auf die sechs Veränderlichen  $\eta$ ,  $\xi$ ,  $\zeta$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Wenn aber der Körper homogen ist und überall dieselbe Temperatur hat, oder wenn man, wie früher, von einem Wechsel der Materie seiner Molecülen innerhalb deren Wirkungssphäre absieht, so wird die Grösse  $fr$ , nur Function von  $r$ , sein; die unter den Summenzeichen befindlichen Grössen werden dann, den Werthen von  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\varphi'$ ,  $\psi'$ ,  $\theta'$ , und  $r$ , zufolge nur die Variablen  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , enthalten und es werden mithin die Glieder dieser Summen für irgend zwei beliebige Punkte  $m$  und  $m'$  dieselben sein, wie für die Punkte  $M$  und  $M'$ . Wenn man also den  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , zunächst bestimmte Werthe beilegt und die Summenzeichen  $\Sigma$  bloss auf die verschiedenen Werthe von  $\eta$ ,  $\xi$ ,  $\zeta$  erstreckt, so wird es, wie in Nro. 16 genügen, alle Zeichen  $\Sigma$  mit der Zahl der Molecüle zu multipliciren, welche in dem Theil von  $B$  enthalten sind, dessen Volumen  $wz$ , ist, d. h. mit  $\frac{wz}{\epsilon^3}$ . Auf diese Weise gehen die vorhergehenden Gleichungen über in:

$$P = -\frac{1}{\epsilon^3} \Sigma \frac{(\varphi + \varphi')z}{r}, fr, \quad Q = -\frac{1}{\epsilon^3} \Sigma \frac{(\psi + \psi')z}{r}, fr, \quad R = -\frac{1}{\epsilon^3} \Sigma \frac{(\theta + \theta')z}{r}, fr,$$

und die durch  $\Sigma$  angedeuteten Summen sind nunmehr nur noch dreifache Summen, bezüglich auf die Coordinaten  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , aller Punkte  $M'$  von  $A'$ .

Beachtet man, dass

$$r^2 = \varphi^2 + \psi^2 + \theta^2,$$

und lässt man die Glieder ausser Acht, welche in Bezug auf  $\varphi'$ ,  $\psi'$ ,  $\theta'$  von der zweiten Ordnung sind, so hat man ferner



$$r' = r + (\varphi\varphi' + \psi\psi' + \theta\theta') \frac{1}{r},$$

$$\frac{1}{r'} fr' = \frac{1}{r} fr + (\varphi\varphi' + \psi\psi' + \theta\theta') \frac{d\frac{1}{r} fr}{r dr},$$

woraus dann die gesuchten Werthe von  $P$ ,  $Q$  und  $R$  in nachstehender Weise hervorgehen:

$$\left. \begin{aligned} P &= -\frac{1}{\varepsilon^3} \sum \frac{(\varphi + \varphi')z}{r} fr - \frac{1}{\varepsilon^3} \sum (\varphi\varphi' + \psi\psi' + \theta\theta') \varphi z, \frac{d\frac{1}{r} fr}{r dr}, \\ Q &= -\frac{1}{\varepsilon^3} \sum \frac{(\psi + \psi')z}{r} fr - \frac{1}{\varepsilon^3} \sum (\varphi\varphi' + \psi\psi' + \theta\theta') \psi z, \frac{d\frac{1}{r} fr}{r dr}, \\ R &= -\frac{1}{\varepsilon^3} \sum \frac{(\theta + \theta')z}{r} fr - \frac{1}{\varepsilon^3} \sum (\varphi\varphi' + \psi\psi' + \theta\theta') \theta z, \frac{d\frac{1}{r} fr}{r dr}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Es bleibt nun noch übrig, diese Ausdrücke auf die einfachste Form zu bringen, deren sie fähig sind, ohne jedoch dabei im Mindesten die Allgemeinheit der Aufgabe zu beeinträchtigen.

21. Da die Molecular - Wirkungssphäre vorausgesetztermaassen eine ausserordentlich grosse, d. h. eine unendlich grosse Anzahl von Molecülen enthält, und da letztere in dem Bereiche der ersteren ohne irgend eine Regelmässigkeit zerstreut liegen, so müssen, wie bei den früheren Summirungen, alle Umstände um die Axe der  $z$ , herum als vollkommen ähnlich angesehen werden, wodurch augenscheinlich alle diejenigen Summen zu Null werden, welche sich auf Grössen beziehen, welche eine ungerade Potenz von  $x$ , oder  $y$ , zum Factor haben. Da man ferner, wie in Nro. (17),

$$\sum \frac{z^2}{r} fr = \frac{1}{3} \sum r fr$$

hat, das Summenzeichen auf alle in der Wirkungssphäre von  $M$  begriffenen Punkte bezogen, so wird man zunächst Nachstehendes folgern:

$$\sum \frac{(\varphi + \varphi')z}{r} fr = -\frac{1}{6} \left( c + c \frac{du}{dx} + c' \frac{du}{dy} + c'' \frac{du}{dz} \right) \sum r fr,$$

$$\sum \frac{(\psi + \psi')z}{r} fr = -\frac{1}{6} \left( c' + c \frac{dv}{dx} + c' \frac{dv}{dy} + c'' \frac{dv}{dz} \right) \sum r fr,$$



$$\Sigma \frac{(\theta + \theta')}{r} f r = - \frac{1}{6} \left( c'' + c \frac{dw}{dx} + c' \frac{dw}{dy} + c'' \frac{dw}{dz} \right) \Sigma r f r.$$

Ich bezeichne mit  $H$  die zweite in  $P$  vorkommende Summe  $\Sigma$  und setze

$$\Sigma x^2 z^2 \frac{d^{\frac{1}{2}} f r}{r dr} = E, \quad \Sigma y^2 z^2 \frac{d^{\frac{1}{2}} f r}{r dr} = F, \quad \Sigma z^4 \frac{d^{\frac{1}{2}} f r}{r dr} = G;$$

substituirt man sodann für  $\varphi, \varphi', \psi, \psi', \theta, \theta'$ , ihre bezüglichen Werthe, so kommt

$$\begin{aligned} -H &= (c^3 G + 3cb^2 F + 3ca^2 E) \frac{du}{dx} \\ &+ (cc'^2 G + cb'^2 F + ca'^2 E + 2c' b b' F + 2c' a a' E) \frac{dv}{dy} \\ &+ (cc''^2 G + cb''^2 F + ca''^2 E + 2c'' b b'' F + 2c'' a a'' E) \frac{dw}{dz} \\ &+ (c^2 c'' G + 2c b b' F + 2c a a' E + c' b^2 F + c' a^2 E) \left( \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right) \\ &+ (c^2 c'' G + 2c b b'' F + 2c a a'' E + c'' b^2 F + c'' a^2 E) \left( \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} \right) \\ &+ (cc' c'' G + cb' b'' F + ca' a'' E + c' b b'' F + c' a a'' E + c'' b b' F \\ &\quad + c'' a a' E) \left( \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dy} \right). \end{aligned}$$

Die Summen  $E, F, G$  sind für  $A$  und  $A'$  gleich, weil die Glieder, welche sich die auf Ebene der  $x$ , und  $y$ , beziehen, und welche die einzigen sind, die einen Unterschied bewirken könnten, gleich Null sind; man kann sie daher auf den ganzen Körper erstrecken und nachher die Hälfte ihrer Werthe nehmen. Nimmt man an, dass der Körper in dem Bereiche der Molecularwirkungssphäre homogen sei, so hat man dann

$$\Sigma z^4 \frac{d^{\frac{1}{2}} f r}{r dr} = \Sigma y^4 \frac{d^{\frac{1}{2}} f r}{r dr} = \Sigma x^4 \frac{d^{\frac{1}{2}} f r}{r dr},$$

$$\Sigma y^2 z^2 \frac{d^{\frac{1}{2}} f r}{r dr} = \Sigma x^2 z^2 \frac{d^{\frac{1}{2}} f r}{r dr} = \Sigma x^2 y^2 \frac{d^{\frac{1}{2}} f r}{r dr};$$

und aus demselben Grunde auch noch



$$\Sigma z'^4 \frac{d\frac{1}{r}fr}{rdr} = \Sigma y'^4 \frac{d\frac{1}{r}fr}{rdr} = \Sigma x'^4 \frac{d\frac{1}{r}fr}{rdr} = 2G,$$

$$\Sigma y'^2 z'^2 \frac{d\frac{1}{r}fr}{rdr} = \Sigma x'^2 z'^2 \frac{d\frac{1}{r}fr}{rdr} = \Sigma x'^2 y'^2 \frac{d\frac{1}{r}fr}{rdr} = 2E = 2F.$$

Setzt man nun in den Gleichungen für  $E$ ,  $F$ ,  $G$ , z. B. in denen für  $G$ , unter dem Summenzeichen  $\Sigma$  an der Stelle von  $z$ , den Werth, welchen man dafür aus den Gleichungen (6) ziehen kann, nemlich

$$z, = -cx' - c'y' - c''z',$$

so wird man daraus

$$G = G(c^4 + c'^4 + c''^4) + 6F(c^2c'^2 + c^2c''^2 + c'^2c''^2)$$

erhalten, und da

$$c^2 + c'^2 + c''^2 = 1,$$

mithin auch

$$c^4 + c'^4 + c''^4 + 2c^2c'^2 + 2c^2c''^2 + 2c'^2c''^2 = 1$$

ist, so wird die vorstehende Gleichung diese andere

$$G = 3F$$

ergeben. Da ferner  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ , so hat man

$$\begin{aligned} \Sigma r^4 \frac{d\frac{1}{r}fr}{rdr} &= \Sigma x^4 \frac{d\frac{1}{r}fr}{rdr} + \Sigma y^4 \frac{d\frac{1}{r}fr}{rdr} + \Sigma z^4 \frac{d\frac{1}{r}fr}{rdr} \\ &+ 2\Sigma x^2y^2 \frac{d\frac{1}{r}fr}{rdr} + 2\Sigma x^2z^2 \frac{d\frac{1}{r}fr}{rdr} + 2\Sigma y^2z^2 \frac{d\frac{1}{r}fr}{rdr}, \end{aligned}$$

oder, was dasselbe ist,

$$\frac{1}{2} \Sigma r^3 \frac{d\frac{1}{r}fr}{dr} = 3G + 6F = 5G.$$

Es ist folglich

$$G = \frac{1}{10} \Sigma r^3 \frac{d\frac{1}{r}fr}{dr}, \quad E = F = \frac{1}{30} \Sigma r^3 \frac{d\frac{1}{r}fr}{dr}.$$



Berücksichtigt man sodann die bekannten Relationen, welche zwischen den neun Cosinus  $a, b$ , u. s. w. existiren, so reducirt sich der Ausdruck für  $H$  auf

$$H = - \frac{1}{36} \Sigma r^3 \frac{d^2 f r}{dr} \cdot \left[ c \left( 3 \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right) + c' \left( \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right) + c'' \left( \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} \right) \right].$$

Die zweite Summe, welche in  $Q$  enthalten ist, wird aus dem Ausdruck für  $H$  durch Vertauschung des  $u$  mit  $v$ , des  $x$  mit  $y$ , des  $c$  mit  $c'$  und die zweite Summe in  $R$  in gleicher Weise durch Vertauschung des  $u$  mit  $w$ , des  $x$  mit  $z$  und des  $c$  mit  $c''$  erhalten werden. Setzt man daher der Abkürzung wegen

$$K = \frac{1}{6 \varepsilon^3} \Sigma r f r, \quad k = \frac{1}{30 \varepsilon^3} \Sigma r^3 \frac{d^2 f r}{dr}, \quad (8)$$

und erstreckt die Summen  $\Sigma$  auf alle diejenigen materiellen Punkte des Körpers, welche in dem Bereiche der Wirkungssphäre von  $M$  liegen, so gehen endlich die Gleichungen (7) in die nachstehenden über

$$P = \left[ K \left( 1 + \frac{du}{dx} \right) + k \left( 3 \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right) \right] c + \left[ K \frac{du}{dy} + k \left( \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right) \right] c' + \left[ K \frac{du}{dz} + k \left( \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} \right) \right] c'',$$

$$Q = \left[ K \left( 1 + \frac{dv}{dy} \right) + k \left( \frac{du}{dx} + 3 \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right) \right] c' + \left[ K \frac{dv}{dx} + k \left( \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy} \right) \right] c + \left[ K \frac{dv}{dz} + k \left( \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \right) \right] c'',$$

$$R = \left[ K \left( 1 + \frac{dw}{dz} \right) + k \left( \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + 3 \frac{dw}{dz} \right) \right] c'' + \left[ K \frac{dw}{dy} + k \left( \frac{dw}{dy} + \frac{du}{dx} \right) \right] c' + \left[ K \frac{dw}{dx} + k \left( \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \right) \right] c.$$



Wenn man nun in dem Innern des Körpers ein Stückchen Fläche von ausserordentlich kleiner Ausdehnung betrachtet, welches durch den Punkt  $M$  geht, und in dem natürlichen Zustande des Körpers mit  $w$ , nach erfolgter Verrückung der Molecülen aber mit  $w'$  bezeichnet ist, so werden die vorhergehenden Formeln den der Fläche  $w'$  entsprechenden Druck nach Grösse und Richtung kennen lehren. Es werden nemlich die durch seine Zerlegung nach den Richtungen der Coordinaten  $x, y, z$  von  $M$  entstehenden Seitenkräfte, welche jene Coordinaten zu vergrössern streben, durch die Producte  $wP$ ,  $wQ$ ,  $wR$  dargestellt sein, wenn man für  $c, c', c''$  die Cosinus derjenigen Winkel nimmt, welche die Normale von  $w$  mit den Axen der  $x, y, z$  bildet und zwar mit demjenigen Theil dieser Normale, welcher in dem Stück des Körpers liegt, auf welches der Druck ausgeübt wird.

22. Lässt man diese gerade Linie mit einer andern zusammenfallen, welche der Axe der  $z$  parallel ist, so dass also die Trennungsfläche von  $A$  und  $A'$  vor der Verrückung der Molecülen eine Parallel-Ebene zu der Ebene der  $x, y$  ist, so hat man  $c = 0, c' = 0, c'' = 1$  und wenn man nun die Werthe von  $P, Q, R$  für diesen speciellen Fall mit  $P_1, Q_1, R_1$  bezeichnet, so ist

$$P_1 = K \frac{du}{dz} + k \left( \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} \right),$$

$$Q_1 = K \frac{dv}{dz} + k \left( \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \right),$$

$$R_1 = K \left( 1 + \frac{dw}{dz} \right) + k \left( \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + 3 \frac{dw}{dz} \right).$$

Ist dagegen die Normale für die ursprüngliche Trennungsfläche der Axe der  $y$  parallel, so ist  $c = 0, c' = 1, c'' = 0$ , und wenn man dann die bezüglichen Werthe von  $P, Q, R$  mit  $P_2, Q_2, R_2$  bezeichnet, so folgt

$$P_2 = K \frac{du}{dy} + k \left( \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right),$$



$$Q_2 = K \left( 1 + \frac{dv}{dy} \right) + k \left( \frac{du}{dx} + 3 \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right),$$

$$R_2 = K \frac{dw}{dy} + k \left( \frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz} \right).$$

Ist endlich die mehrgenannte Normale der Axe der  $x$  parallel und bedeuten dann  $P_3$ ,  $Q_3$ ,  $R_3$  die correspondirenden Werthe von  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ , so ist  $c = 1$ ,  $c' = 0$ ,  $c'' = 0$ , und

$$P_3 = K \left( 1 + \frac{du}{dx} \right) + k \left( 3 \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right),$$

$$Q_3 = K \frac{dv}{dx} + k \left( \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy} \right),$$

$$R_3 = K \frac{dw}{dx} + k \left( \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \right).$$

Vergleicht man diese Specialwerthe mit den allgemeinen Ausdrücken für  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ , so findet man

$$\left. \begin{aligned} P &= P_1 c'' + P_2 c' + P_3 c, \\ Q &= Q_1 c'' + Q_2 c' + Q_3 c, \\ R &= R_1 c'' + R_2 c' + R_3 c; \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ein Resultat, zu dem man auch auf folgende Weise gelangen kann.

Denken wir uns im Innern des Körpers, und noch ehe er seine Gestalt geändert hat, ein ausserordentlich kleines Tetraeder, dergestalt: dass  $M$  der Gipfel desselben ist, dass ferner die drei Seitenflächen, welche an diesen Punkt anstossen, den Coordinaten-Ebenen parallel sind, und dass endlich die vierte Seitenfläche auf der geraden Linie senkrecht stehe, welche mit den Axen der  $x$ ,  $y$ ,  $z$  Winkel macht, deren Cosinus  $c$ ,  $c'$ ,  $c''$  sind. Bezeichne  $w$  den Flächeninhalt dieser vierten Fläche, und seien  $wP'$ ,  $wQ'$ ,  $wR'$  diejenigen Seitenkräfte, die entstehen, wenn man die Wirkung, welche der an diese Fläche angrenzende Theil des Körpers, nachdem dieser seine Gestalt geändert, ausübt, nach den Axen der  $x$ ,  $y$ ,  $z$  zerlegt. Die drei andern Seitenflächen werden die Projectionen jener vierten, und ihre Flächeninhalte werden daher durch  $wc$ ,  $wc'$ ,  $wc''$  dargestellt sein; die Seitenkräfte



der Wirkung des Körpers aber, denen sie entsprechen, werden zu ihren Werthen die Producte aus diesen Flächen in die Grössen  $P_1$ ,  $Q_1$  u. s. w. haben. Da aber alle die Kräfte, welche auf das Tetraeder wirken, sich im Gleichgewicht halten müssen, so muss sein:

$$P' + P_1 c'' + P_2 c' + P_3 c = 0$$

$$Q' + Q_1 c'' + Q_2 c' + Q_3 c = 0$$

$$R' + R_1 c'' + R_2 c' + R_3 c = 0$$

In diesen Gleichungen ist der, allen Gliedern gemeinsame, Factor  $w$  unterdrückt, und es sind demnächst diejenigen Grössen, welche in Bezug auf die Abmessungen des Tetraeders von der dritten Ordnung sind, vernachlässigt. Deshalb stellen wir auch keine gegebenen Kräfte in Rechnung, wie etwa die Schwere oder andere, welche von allen Punkten herrühren und seinem Volumen proportional sind und wir nehmen deshalb bloss auf diejenigen Wirkungen der äusseren Theile des Körpers Rücksicht, welche nur von der Oberfläche des Tetraeders abhängig sind. Aus demselben Grunde können wir auch die vierte Fläche, obgleich sie nicht durch den Punkt  $M$  geht, parallel zu sich selbst dorthin verlegen, und mithin die Kräfte  $P'$ ,  $Q'$ ,  $R'$  als den Kräften  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  gleich und entgegengesetzt betrachten, wonach alsdann die vorstehenden Gleichungen mit denen unter (9) zusammenfallen, was zu erweisen war.

23. Um die Drucke zu finden, welche auf die drei Seitenflächen  $\lambda\lambda'$ ,  $\lambda\lambda''$ ,  $\lambda'\lambda''$  des in Nro. 19 betrachteten schiefwinkligen Parallelepipeds ausgeübt werden, muss man die Grössen  $P_1$ ,  $Q_1$ , u. s. w. mit den Flächeninhalten  $ll'$ ,  $ll''$ ,  $l'l''$  multipliciren, welche jenen Seitenflächen vor der Verrückung der Molecülen entsprechen. Da man nun

$$ll' = \lambda\lambda' \left( 1 - \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy} \right),$$

$$ll'' = \lambda\lambda'' \left( 1 - \frac{du}{dx} - \frac{dw}{dz} \right),$$

$$l'l'' = \lambda'\lambda'' \left( 1 - \frac{dv}{dy} - \frac{dw}{dz} \right)$$



hat, so folgen daraus für die Seitenkräfte, welche entstehen, wenn man den auf die Fläche  $\lambda\lambda'$  wirkenden Druck nach den Axen der  $x, y, z$  zerlegt und sodann jene Seitenkräfte auf ein Stück jener Fläche bezieht, welches man zur Einheit gewählt hat, die nachstehenden Werthe:

$$P_1 \left( 1 - \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy} \right), \quad Q_1 \left( 1 - \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy} \right), \quad R_1 \left( 1 - \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy} \right);$$

ferner für die analogen Seitenkräfte, die sich auf die Fläche  $\lambda\lambda''$  beziehen,

$$P_2 \left( 1 - \frac{du}{dx} - \frac{dw}{dz} \right), \quad Q_2 \left( 1 - \frac{du}{dx} - \frac{dw}{dz} \right), \quad R_2 \left( 1 - \frac{du}{dx} - \frac{dw}{dz} \right);$$

und endlich für die Seitenkräfte in Bezug auf die Fläche  $\lambda'\lambda''$

$$P_3 \left( 1 - \frac{dv}{dy} - \frac{dw}{dz} \right), \quad Q_3 \left( 1 - \frac{dv}{dy} - \frac{dw}{dz} \right), \quad R_3 \left( 1 - \frac{dv}{dy} - \frac{dw}{dz} \right).$$

Betrachten wir nun im Innern des Körpers und nach geschehener Ver-  
rückung der Molecüle ein ausserordentlich kleines Tetraeder, von welchem drei Seitenflächen im Punkte  $M$  zusammenlaufen, während sie den Ebenen der  $x, y, z$  parallel sind und dessen vierte Fläche successive den Ebenen der Flächen  $\lambda\lambda', \lambda\lambda'', \lambda'\lambda''$  parallel sei. Seien  $P_1, Q_1, R_1$  die Seitenkräfte, welche entstehen, wenn man den Druck auf die zur Ebene der  $x, y$  parallele Fläche nach den Axen der  $x, y, z$  zerlegt, und sie auf die Einheit der Fläche bezieht; seien ferner  $P_2, Q_2, R_2$  dieselben Grössen in Bezug auf die Ebene der  $x, z$ ; und  $P_3, Q_3, R_3$  die analogen Grössen in Bezug auf die Ebene der  $y, z$ . Ist sodann die vierte Fläche beispielsweise etwa der Ebene der Fläche  $\lambda\lambda'$  parallel, so kann man ohne merklichen Fehler den Druck gegen die beiden parallelen Ebenen als gleich und entgegengesetzt ansehen. Nennt man daher den Flächeninhalt dieser vierten Fläche  $w'$ , und zerlegt den Druck, den sie erleidet, nach den Axen der  $x, y, z$ , so sind die Seitenkräfte

$$-w' P_1 \left( 1 - \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy} \right), \quad -w' Q_1 \left( 1 - \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy} \right), \quad -w' R_1 \left( 1 - \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy} \right).$$

Behält man die Bezeichnungen der Nro. 19 bei, so werden die Projectionen von  $w'$  oder die Flächeninhalte der drei andern Seitenflächen folgende Werthe haben:



$$w' \cos m'', \quad w' \cos n'', \quad w' \cos p'',$$

und man wird  $P'_3, Q'_3, R'_3$  mit dem ersten dieser Werthe;  $P'_2, Q'_2, R'_2$  mit dem zweiten und  $P'_1, Q'_1, R'_1$  mit dem dritten multipliciren müssen, um die neun Seitenkräfte der bezüglichen Drucke zu haben. Soll nun das Tetraeder im Gleichgewicht sein, so wird man folglich nachstehende Gleichungen haben:

$$P_1 \left( 1 - \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy} \right) = P'_1 \cos p'' + P'_2 \cos n'' + P'_3 \cos m'',$$

$$Q_1 \left( 1 - \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy} \right) = Q'_1 \cos p'' + Q'_2 \cos n'' + Q'_3 \cos m'',$$

$$R_1 \left( 1 - \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy} \right) = R'_1 \cos p'' + R'_2 \cos n'' + R'_3 \cos m''.$$

Die Betrachtung des Tetraeders, wenn seine vierte Seitenfläche der Ebene der Fläche  $\lambda\lambda''$  parallel ist, giebt in gleicher Art

$$P_2 \left( 1 - \frac{du}{dx} - \frac{dw}{dz} \right) = P'_1 \cos p' + P'_2 \cos n' + P'_3 \cos m',$$

$$Q_2 \left( 1 - \frac{du}{dx} - \frac{dw}{dz} \right) = Q'_1 \cos p' + Q'_2 \cos n' + Q'_3 \cos m',$$

$$R_2 \left( 1 - \frac{du}{dx} - \frac{dw}{dz} \right) = R'_1 \cos p' + R'_2 \cos n' + R'_3 \cos m';$$

und beachtet man zuletzt den Fall, wenn die vierte Seitenfläche parallel zur Ebene der  $\lambda'\lambda''$  liegt, so hat man noch

$$P_3 \left( 1 - \frac{dv}{dy} - \frac{dw}{dz} \right) = P'_1 \cos p + P'_2 \cos n + P'_3 \cos m,$$

$$Q_3 \left( 1 - \frac{dv}{dy} - \frac{dw}{dz} \right) = Q'_1 \cos p + Q'_2 \cos n + Q'_3 \cos m,$$

$$R_3 \left( 1 - \frac{dv}{dy} - \frac{dw}{dz} \right) = R'_1 \cos p + R'_2 \cos n + R'_3 \cos m.$$

Wenn man nun in diesen neun Gleichungen die Werthe der neun Cosinus  $\cos m, \cos n$ , u. s. w. substituirt, wie sie durch die Gleichungen (5) gegeben sind, und wenn man fortfährt, diejenigen Grössen zu vernachlässigen, welche im Vergleich zu  $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}$ , u. w. s. von der zweiten Ordnung sind, so wird man ohne Schwierigkeit die nachfolgenden Gleichungen erhalten:



$$P'_1 = P_1 \left( 1 - \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy} \right) + P_2 \frac{dw}{dy} + P_3 \frac{dw}{dx},$$

$$Q'_1 = Q_1 \left( 1 - \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy} \right) + Q_2 \frac{dw}{dy} + Q_3 \frac{dw}{dx},$$

$$R'_1 = R_1 \left( 1 - \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy} \right) + R_2 \frac{dw}{dy} + R_3 \frac{dw}{dx},$$

$$P'_2 = P_2 \left( 1 - \frac{du}{dx} - \frac{dw}{dz} \right) + P_3 \frac{dv}{dx} + P_1 \frac{dv}{dz},$$

$$Q'_2 = Q_2 \left( 1 - \frac{du}{dx} - \frac{dw}{dz} \right) + Q_3 \frac{dv}{dx} + Q_1 \frac{dv}{dz},$$

$$R'_2 = R_2 \left( 1 - \frac{du}{dx} - \frac{dw}{dz} \right) + R_3 \frac{dv}{dx} + R_1 \frac{dv}{dz},$$

$$P'_3 = P_3 \left( 1 - \frac{dv}{dy} - \frac{dw}{dz} \right) + P_2 \frac{du}{dy} + P_1 \frac{du}{dx},$$

$$Q'_3 = Q_3 \left( 1 - \frac{dv}{dy} - \frac{dw}{dz} \right) + Q_2 \frac{du}{dy} + Q_1 \frac{du}{dx},$$

$$R'_3 = R_3 \left( 1 - \frac{dv}{dy} - \frac{dw}{dz} \right) + R_2 \frac{du}{dy} + R_1 \frac{du}{dx};$$

und wenn man für die neun Kräfte  $P_1, Q_1$ , u. s. w. ihre Werthe aus Nro. 22 setzt, so hat man endlich

$$P'_1 = R'_3 = (K + k) \left( \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} \right),$$

$$Q'_1 = R'_2 = (K + k) \left( \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \right),$$

$$P'_2 = Q'_3 = (K + k) \left( \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right),$$

$$R'_1 = K \left( 1 + \frac{dw}{dz} - \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy} \right) + k \left( \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + 3 \frac{dw}{dz} \right),$$

$$Q'_2 = K \left( 1 + \frac{dv}{dy} - \frac{du}{dx} - \frac{dw}{dz} \right) + k \left( \frac{du}{dx} + 3 \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right),$$

$$P'_3 = K \left( 1 + \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy} - \frac{dw}{dz} \right) + k \left( 3 \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right).$$

(10)



$$\frac{dP_2}{dy} v, \quad \frac{dQ_2}{dy} v, \quad \frac{dR_2}{dy} v,$$

$$\frac{dP_3}{dx} v, \quad \frac{dQ_3}{dx} v, \quad \frac{dR_3}{dx} v;$$

sie wirken in einer Richtung, die der der positiven  $x, y, z$  entgegengesetzt ist, d. h. in einer den Kräften  $P_1, Q_1$  u. s. w. entgegengesetzten Richtung: die der ersten vorstehenden Verticalcolumnne sind der Axe der  $x$  parallel, die der zweiten der Axe der  $y$  und die der dritten der Axe der  $z$ .

Da diese Kräfte dem Volumen proportional sind, so wird man die gegebenen Kräfte in Rechnung stellen müssen, welche auf alle Punkte des Parallelepipedes wirken. Seien die durch die Zerlegung dieser letzteren Kräfte entstehenden Seitenkräfte  $X, Y, Z$  wirkend nach der Richtung der positiven  $x, y, z$ , und bezogen auf die Einheit der Masse. Die ursprüngliche Dichtigkeit des Körpers im Punkte  $M$  ist  $\rho$ , die Masse des Parallelepipedes ist mithin  $v\rho$ , und die gegebenen Kräfte, welche auf diese Masse wirken, werden mithin

$$X\rho v, \quad Y\rho v, \quad Z\rho v$$

sein, wenn man, wie immer, diejenigen Grössen ausser Acht lässt, welche von einer höheren Ordnung sind als  $v$ , wonach es dann gestattet ist,  $X, Y, Z, \rho$  in dem ganzen Umfange des Parallelepipedes als constant zu betrachten. Soll letzteres nun im Gleichgewicht bleiben, so müssen die nachfolgenden drei Gleichungen bestehen:

$$\left. \begin{aligned} X\rho &= \frac{dP_1}{dz} + \frac{dP_2}{dy} + \frac{dP_3}{dx}, \\ Y\rho &= \frac{dQ_1}{dz} + \frac{dQ_2}{dy} + \frac{dQ_3}{dx}, \\ Z\rho &= \frac{dR_1}{dz} + \frac{dR_2}{dy} + \frac{dR_3}{dx}, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

wo der allen Gliedern gemeinschaftliche Factor  $v$  unterdrückt worden ist.

Diese Gleichungen sind, wie man sieht, dieselben, als wenn man die Abmessungen des Parallelepipedes unendlich klein angenommen hätte, eine



Voraussetzung, die sich nicht mit der Vorstellung von einem Körper vertragen haben würde, der zufolge dieser als aus abgesonderten und durch leere Zwischenräume getrennten Molecülen zusammengesetzt gedacht wird. Es ist sogar nöthig, dass diese Abmessungen eine merkliche Grösse haben, oder wenigstens, dass sie sehr grosse Vielfache des Halbmessers der Molecular-Wirkungssphäre seien, damit man im Vergleich zur ganzen Wirkung des Körpers auf jede seiner Seitenflächen denjenigen Theil dieser Wirkung ausser Acht lassen kann, der den Punkten entspricht, deren Entfernung von den Kanten kleiner als jener Halbmesser ist. Andernfalls würde dieser Theil auf die Seitenkräfte Einfluss haben, die zweien und selbst dreien angrenzenden Seitenflächen entsprechen und man würde in den Gleichungen (12) nicht mehr die Werthe von  $P_1$ ,  $Q_1$  u. s. w., wie sie vorher berechnet sind, anwenden können.

Hätte man ein Parallelepiped betrachtet, dessen Seitenflächen *nach* erfolgter Verrückung der Molecülen, aber nicht im natürlichen Zustande des Körpers, den Coordinaten-Ebenen parallel gewesen wären, so wäre man zu denselben Gleichgewichts-Gleichungen gelangt, mit dem einzigen Unterschiede, dass statt der Kräfte  $P_1$ ,  $Q_1$ , u. s. w. die Kräfte  $P'_1$ ,  $Q'_1$ , u. s. w. angewendet werden müssten. Diese beiden Systeme von Gleichungen sind identisch, weil  $K = 0$ , und sie würden es auch noch sein, wenn  $K$  nur eine von  $x$ ,  $y$ ,  $z$  unabhängige Function wäre, denn dann würde man vermöge der Gleichungen (10) und der Formeln der Nro. 22 haben:

$$\frac{d(P'_1 - P_1)}{dz} + \frac{d(P'_2 - P_2)}{dy} + \frac{d(P'_3 - P_3)}{dx} = 0,$$

$$\frac{d(Q'_1 - Q_1)}{dz} + \frac{d(Q'_2 - Q_2)}{dy} + \frac{d(Q'_3 - Q_3)}{dx} = 0,$$

$$\frac{d(R'_1 - R_1)}{dz} + \frac{d(R'_2 - R_2)}{dy} + \frac{d(R'_3 - R_3)}{dx} = 0.$$

Das Gleichgewicht des einen wie des andern Parallelepipeds würde noch nöthig machen, dass man auf die Momente der sie angreifenden Kräfte Rücksicht nähme; aber es würde daraus keine neue Bedingung hervorgehen, die



Im Allgemeinen darf man die Kräfte  $P_1, Q_1$ , u. s. w. nicht mit den Kräften  $P, Q$ , u. s. w. verwechseln; da aber die Summen, welche in Nro. 17 und in Nro. 21 mit  $N$  und  $K$  bezeichnet sind, dieselben sind, und da man, weil der ursprüngliche Zustand des Körpers sein natürlicher Zustand ist, nach Nro. 17  $N = 0$  hat, so verschwinden in den vorhergehenden Formeln und in denen der Nummer 22 die Glieder, welche mit  $K$  multiplicirt sind, so dass die beiden in Rede stehenden Systeme von Kräften in eins zusammenfallen. Unter den Kräften  $P_1, Q_1$ , u. s. w. sind dann nur sechs ungleiche, und deren Werthe sind:

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= R_3 = k \left( \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} \right), \\ Q_1 &= R_2 = k \left( \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \right), \\ P_2 &= Q_3 = k \left( \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right), \\ R_1 &= k \left( \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + 3 \frac{dw}{dz} \right), \\ Q_2 &= k \left( \frac{du}{dx} + 3 \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right), \\ P_3 &= k \left( 3 \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Wir werden jedoch in der Folge sehen, dass es andere Fälle giebt, in denen man die Grösse  $K$  beibehalten und entweder die Gleichungen (10) oder die Formeln in Nro. 22 beibehalten muss, jenachdem man die Drucke betrachtet, welche die Seitenflächen eines Parallelepipeds erleiden, welches nach der Verrückung der Molecüle rechtwinklig ist oder die Drucke gegen die Seitenflächen eines Parallelepipeds, welches ursprünglich rechtwinklig war, aber seine Form mit dem Körper zu gleicher Zeit verändert hat. Im Allgemeinen muss man, wenn man den Druck auf eine Fläche kennen lernen will, welche während der Ortsveränderung der Molecüle des Körpers unverrückt bleibt, in den Formeln (9) an die Stelle der Grössen  $P_1, Q_1$ ,



u. s. w. jedesmal  $P_1$ ,  $Q_1$ , u. s. w. setzen, wobei dann  $c$ ,  $c'$ ,  $c''$  immer die Cosinus der Winkel bezeichnen, welche sich auf die Richtung der Normale gegen jene Fläche beziehen.

24. Nachdem auf diese Weise die Seitenkräfte bestimmt sind, in welche sich die aus der Molecular-Wirkung herrührenden Drucke zerlegen lassen, so wird man nun daraus unmittelbar die Gleichungen für das Gleichgewicht eines Körpers nach der durch gegebene Kräfte hervorgebrachten Veränderung seiner Form herleiten können.

Betrachten wir zu diesem Behufe wiederum das Parallelepiped der Nro. 19, für welches  $M$  einer der Winkelpunkte ist, und bei welchem in dem natürlichen Zustande des Körpers die drei anstossenden Seitenflächen den Coordinaten - Ebenen parallel waren. Wenn die Verrückung der Molecülen stattgefunden hat, so werden die durch Zerlegung entstehenden Seitenkräfte für den Druck gegen die Fläche, welche ursprünglich der Ebene der  $x$ ,  $y$  parallel war, die nachstehenden sein:  $P_1 l'$ ,  $Q_1 l'$ ,  $R_1 l'$ . Diese drei Grössen sind Functionen der Coordinaten  $x$ ,  $y$ ,  $z$  des Punktes  $M$ ; in Bezug auf die gegenüberstehenden Flächen wird man also haben:

$$P_1 l' + \frac{dP_1}{dz} l' l'', \quad Q_1 l' + \frac{dQ_1}{dz} l' l'', \quad R_1 l' + \frac{dR_1}{dz} l' l'',$$

wenn man diejenigen Ausdrücke ausser Acht lässt, welche in Bezug auf  $l$ ,  $l'$ ,  $l''$  von der dritten Ordnung sind. Nimmt man sie mit entgegengesetztem Vorzeichen, so werden sie die Seitenkräfte des Drucks bezeichnen, welchen die der ursprünglichen Fläche parallel gegenüber liegende erleidet. Betrachtet man in dieser Weise die sechs Seitenflächen des Parallelepipeds, indem man immer die zwei gegenüberliegenden zusammenstellt, so wird man alle Kräfte erhalten, welche aus der Wirkung des Körpers auf diess Körpertheilchen entspringen. Bedeute  $v$  das ursprüngliche Volumen des letzteren, so dass  $v = l' l''$  ist. Unterdrückt man diejenigen Theile dieser Kräfte, welche sich gegenseitig aufheben, so reduciren sie sich auf

$$\frac{dP_1}{dz} v, \quad \frac{dQ_1}{dz} v, \quad \frac{dR_1}{dz} v,$$



oder einer scharfen Kante oder in letzteren selbst liegen. Für jeden anderen Punkt  $M$ , der Oberfläche werden sie gültig sein und man wird darin an die Stelle der Coordinaten  $x, y, z$  des Punktes  $M$ , von denen die Grössen  $P_1, Q_1$  u. s. w. abhängig sind, ohne merklichen Fehler die Coordinaten  $x, y, z$ , setzen können. Wenn der Körper in seinem Innern einen oder mehrere leere Räume enthält, so werden jene Gleichungen auch für die Grenzen von diesen gelten. In jedem einzelnen Falle werden die Kräfte  $X, Y, Z$ , in Functionen der Veränderlichen  $x, y, z$ , gegeben und diese wiederum durch die Gleichung für die Oberfläche des Körpers vor seiner Formveränderung untereinander verbunden sein; aus letzterer Gleichung wird man auch die Werthe für die Cosinus  $c, c', c''$  ableiten. Vereinigt man die Gleichungen (12) und (13), so wird man alle für das Gleichgewicht des Körpers nothwendigen aber auch ausreichenden Bedingungen haben, welche gefunden werden sollten.

Hätte man statt des Cylinders, dessen Axe die zur Oberfläche des Körpers normale Linie  $MM$ , ist, bevor die Form des Körpers sich geändert hat, denjenigen Cylinder betrachtet, dessen Axe nach geschehener Formveränderung zur Oberfläche normal ist, so würde man Gleichungen erhalten haben, die den vorigen ganz ähnlich sind, und in denen statt der Kräfte  $P_1, Q_1$  u. s. w. vielmehr  $P'_1, Q'_1$ , u. s. w. und statt der Cosinus  $c, c', c''$  vielmehr die Cosinus derjenigen Winkel vorgekommen sein würden, welche dieser zweiten Normale entsprechen. Da die letzteren von jenen nur um Grössen von der Ordnung der  $u, v, w$  verschieden sein können, und da wegen  $K=0$ , die Kräfte  $P_1, Q_1$  u. s. w., welches Grössen derselben Ordnung sind, bezüglich den Kräften  $P'_1, Q'_1$  u. s. w. gleich sind, so geht daraus die Identität der Gleichungen, die so eben bezeichnet worden sind, mit denen unter (13) gegebenen hervor.

26. Nächst dem natürlichen Zustande des Körpers ist der einfachste der, wenn die innern Kräfte  $X, Y, Z$  Null gesetzt werden und wenn der äussere Druck in der ganzen Ausdehnung der Oberfläche constant und normal ist. Bezeichnet man ihn mit  $\Pi$  und betrachtet ihn als positiv oder als negativ, jenachdem er von aussen nach innen, oder von innen nach aussen wirkt, d. h.



jenachdem er den Körper zusammenzudrücken oder auszudehnen strebt, so haben wir

$$X, = - c\Pi, \quad Y, = - c'\Pi, \quad Z, = - c''\Pi.$$

Ist nun der Körper homogen, so genügt man den Gleichungen (12) und (13), wenn man

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy} = \frac{dw}{dz} = -\delta,$$

dagegen die andern sechs Partial-Differenzial-Quotienten  $\frac{du}{dy}$ ,  $\frac{dv}{dx}$ , u. s. w.  $= 0$  setzt, und unter  $\delta$  eine Constante versteht, die näher festzustellen bleibt.

Man hat dann, den Formeln (11) zufolge,

$$R_1 = Q_2 = P_3 = -5k\delta,$$

und die übrigen 6 Kräfte  $P_1$ ,  $P_2$  u. s. w. gleich Null. Die Gleichungen (12) reduciren sich mithin auf

$$\frac{d(k\delta)}{dx} = 0, \quad \frac{d(k\delta)}{dy} = 0, \quad \frac{d(k\delta)}{dz} = 0,$$

und diese Bedingungen sind erfolgt, weil  $\delta$  eine Constante ist, nach der Voraussetzung,  $k$  aber in Folge der Homogenität des Körpers. Zu gleicher Zeit reduciren sich die Gleichungen (13) auf eine einzige, nemlich auf

$$\Pi + 5k\delta = 0,$$

durch welche der Werth von  $\delta$  bestimmt wird, sobald der von  $k$  es ist. Ist der Körper heterogen, so kann die Grösse  $k$  irgend eine Function von  $x$ ,  $y$ ,  $z$  sein, und man wird den Gleichungen (12) und (13) im Allgemeinen nicht mehr dadurch genügen können, dass man die drei Partial-Differenzial-Quotienten  $\frac{du}{dx}$ ,  $\frac{dv}{dy}$ ,  $\frac{dw}{dz}$  unter sich gleich und die übrigen sechs gleich Null setzt.

27. Im Fall der Homogenität werden die vorstehenden Werthe der Differenzialquotienten die Gleichung (4) auf



von den in den Gleichungen (12) enthaltenen verschieden wäre. Denn da die Unbekannten des Problems nur drei an der Zahl sind, nemlich die Grössen  $u, v, w$ , als Functionen von  $x, y, z$ , so können auch nur drei Gleichungen existiren, welche für alle Punkte des Körpers gelten. Man kann sich in der That leicht vergewissern, dass die Gleichungen für die Momente durch die vorhergehenden Werthe der Molecularkräfte identisch gemacht werden: wir wollen uns indessen der Kürze wegen nicht dabei aufhalten, diesen Nachweis zu führen. Unabhängig aber von den Gleichungen (12) giebt es noch andere, welche bloss für die Oberfläche des Körpers gelten, und welche man in nachstehender Weise erhalten kann.

25. Verlegen wir den Punkt  $M$  in eine Entfernung von der Oberfläche, welche zwar unmerklich, aber doch grösser ist, als der Halbmesser der Molecular - Wirkungssphäre. Vor der Veränderung der Form des Körpers werde durch den Punkt  $M$  eine gerade Linie gelegt, welche normal zur Oberfläche des Körpers ist und dieser in einem Punkt  $M$ , begegnet, dessen Coordinaten, bezogen auf die Axen der  $x, y, z$  dann  $x_1, y_1, z_1$  sein mögen. Durch denselben Punkt  $M$  werde eine Ebene gelegt, welche auf  $MM$ , senkrecht steht. Denken wir uns die gerade Linie  $MM$ , als Axe eines Cylinders, dessen andere Abmessungen ebenfalls unmerklich sind, und welcher zwischen den zwei Ebenen liegt, von denen die eine die Oberfläche des Körpers in  $M$ , berührt, die andere aber, parallel zu jener durch den Punkt  $M$  geführt ist. Sei  $w$  der Flächeninhalt von jeder der beiden Grundflächen des Cylinders und seien  $c, c', c''$  die Cosinus derjenigen Winkel, welche die äussere Verlängerung von  $MM$ , mit den Axen der  $x, y, z$  bildet. Zerlegt man nun den Druck, den die innere Grundfläche des Cylinders nach der Verrückung der Molecüle erleidet, nach den Richtungen der positiven  $x, y, z$ , so werden  $wP, wQ, wR$ , den Gleichungen (9) zufolge, die bezüglichen Seitenkräfte sein. Nehmen wir an, dass auf alle Punkte der Oberfläche des Körpers ein gegebener Druck wirke; seien  $X, Y, Z$ , die Seitenkräfte desselben für den Punkt  $M$ , bezogen auf die Einheit der Fläche und von der Art, dass sie die Coordinaten zu vergrössern streben. Da die äussere Grundfläche des Cylinders ohne merklichen Fehler als mit der Oberfläche des Körpers zusammen-



fallend gedacht werden kann, so wird man  $wX$ ,  $wY$ ,  $wZ$ , als diejenigen Seitenkräfte annehmen können, welche aus der Zerlegung des gegen jene Grundfläche stattfindenden Drucks entstehen würden, und jene Seitenkräfte werden in der Richtung der Kräfte  $wP$ ,  $wQ$ ,  $wR$  wirken. Jedenfalls setzt diess voraus, dass die Oberfläche des Körpers keine scharfe Kante habe, welche durch den Punkt  $M$  hindurch oder in unmerklicher Entfernung an ihm vorbeigeht. Unter dieser Voraussetzung wird man, wie in Nro. 17, nachweisen können, dass die Wirkung desjenigen Theils des Körpers, welcher zwischen seiner Oberfläche und der durch  $M$  geführten Ebene liegt, und welche derselbe möglicherweise auf den Cylinder, parallel zu dessen Länge ausüben könnte, gleich Null ist; auch wird man leicht erkennen, dass diejenige Wirkung des so eben genannten Theils des Körpers, der den Cylinder von allen Seiten umgiebt und dessen Dichtigkeit parallel zur Oberfläche sich nicht merklich ändert, welche in einer auf die Länge senkrechten Richtung statt hat, sich auf eine Kraft reduciren muss, die von der Oberfläche und der Dicke des Cylinders abhängig oder seinem Volumen proportional ist. Man wird daher diese Kraft im Verhältniss zu denjenigen Drucken, welche die beiden Grundflächen erleiden, vernachlässigen können; aus demselben Grunde wird dasselbe auch in Betreff derjenigen Wirkung geschehen können, welche die gegebenen Kräfte  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  auf die ganze Masse des Cylinders ausüben, und die Kräfte, welche auf diesen kleinen Theil des Körpers wirken, werden sich daher auf die drei Seitenkräfte

$$w(X + P), \quad w(Y + Q), \quad w(Z + R),$$

zurückführen. Soll Gleichgewicht stattfinden, so wird jede von ihnen für sich der Null gleich sein müssen, und wenn man für  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  ihre Werthe aus den Gleichungen (9) setzt, so wird man mithin haben:

$$\left. \begin{aligned} X + P_1 c'' + P_2 c' + P_3 c &= 0 \\ Y + Q_1 c'' + Q_2 c' + Q_3 c &= 0 \\ Z + R_1 c'' + R_2 c' + R_3 c &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Man wird nicht ausser Acht lassen, dass diese Gleichungen nicht für Punkte statt haben, welche in einer unmerklichen Entfernung von einer Spitze



$$\frac{r' - r}{r} = -\delta$$

reduciren. Die Grösse  $\delta$  wird mithin die lineare Zusammenziehung oder Ausdehnung des Körpers ausdrücken, jenachdem sie positiv oder negativ ist; sie wird deshalb mit  $\Pi$  einerlei Vorzeichen haben müssen, woraus hervorgeht, dass der Coefficient  $k$ , welcher von der Materie des Körpers abhängt, immer negativ sein muss. Wenn die durch einen gegebenen Druck  $\Pi$  hervorgebrachte Verminderung in dem Volumen eines Körpers bekannt ist, so wird man daraus unmittelbar den Werth von  $\delta$  ableiten können; derselbe wird nemlich nahehin gleich sein dieser Verminderung, dividirt durch das Dreifache des ursprünglichen Volumens. Die Gleichung  $\Pi + 3k\delta = 0$  wird sodann den Werth von  $k$  ergeben, welcher von der Materie des Körpers und seiner Wärmemenge *nach* der Zusammendrückung abhängen wird, welche letztere von derjenigen *vor* der Zusammendrückung verschieden sein kann.

In Folge der Gleichung (9) werden die Seitenkräfte des im Innern stattfindenden Drucks die nachstehenden sein

$$P = -3k\delta c, \quad Q = -3k\delta c', \quad R = -3k\delta c'',$$

und da jener Druck auf eine Ebene wirkt, deren Normale mit seinen Seitendruck Winkel bildet, für welche  $c$ ,  $c'$  und  $c''$  die Cosinus sind, so sieht man, dass seine Richtung senkrecht auf jener Ebene steht, dass er nach allen Richtungen um diesen Punkt hin derselbe ist, nemlich gleich  $3k\delta$  oder dem äusseren Druck  $\Pi$ , und dass er von Aussen nach Innen oder von Innen nach Aussen in Bezug auf den gedrückten Theil gerichtet sein wird, jenachdem  $\Pi$  positiv oder negativ ist.

Da die lineare Zusammenziehung  $\delta$  ebenfalls nach allen Richtungen hin und für alle inneren Punkte des Körpers dieselbe ist, so folgt daraus, dass der Körper *nach* erfolgter Verrückung seiner Molecülen gerade so constituirt sein wird, wie er es vorher war, mit dem Unterschiede, dass seine Molecülen überall einander näher gerückt sind oder sich mehr von einander entfernt haben, indem ihre Zwischenräume in dem Verhältniss von  $1 - \delta$  zur Einheit sich geändert haben. Alle die Erörterungen in Nro. 15, 16 und 17,



welche sich auf den natürlichen Zustand des Körpers beziehen, werden mithin ebenfalls auf diesen Zustand der Zusammendrückung oder der Ausdehnung Anwendung finden; statt aber, wie in Nro. 17, die Summe  $\Sigma$ , welche  $K$  vorstellt, gleich Null zu haben, wird sich  $K = \Pi$  ergeben, so dass sein muss

$$K = -5k\delta.$$

Denn setzt man in der ersten Gleichung unter (8)  $r'$  und  $\varepsilon'$  an die Stelle von  $r$  und  $\varepsilon$ , so hat man

$$K = \frac{1}{6\varepsilon'^3} \Sigma r' f r',$$

und zu gleicher Zeit

$$r' = r - r\delta, \quad \varepsilon' = \varepsilon - \varepsilon\delta,$$

wo  $r$  und  $\varepsilon$  sich auf den natürlichen,  $r'$  und  $\varepsilon'$  aber auf den darauf folgenden Zustand des Körpers beziehen. Da nun  $\delta$  eine sehr kleine Bruchzahl ist, so kann man  $K$  in einer nach Potenzen von  $\delta$  geordneten convergenten Reihe entwickeln, und wenn man hierin die höheren Potenzen von der zweiten einschliesslich an gerechnet vernachlässiget, so kommt

$$K = \frac{(1 + \delta)}{6\varepsilon^3} \Sigma r f r - \frac{\delta}{6\varepsilon^3} \Sigma r^3 \frac{d}{dr} f r.$$

Da nun, der für den natürlichen Zustand gefundenen Bedingung zufolge,  $\Sigma r f r = 0$  ist, so wird sich der vorstehende Ausdruck für  $K$  auf sein zweites Glied reduciren und dieses ist, der zweiten Gleichung unter (8) zufolge, gleich  $-5k\delta$ .

Im Allgemeinen sind für eine und dieselbe Function  $f r$ , welche sehr schnell sich ändert, die Grössen  $K$  und  $k$  von einerlei Ordnung; da aber die Function  $f r$  aus zwei Theilen von entgegengesetztem Vorzeichen besteht und in dem Umfange ihrer merklichen Werthe vom Positiven zum Negativen übergehen kann, so ist es möglich, dass der Werth von  $k$  im Vergleich zu dem von  $K$  ausserordentlich gross werde; es kann daher die Gleichung  $K = -5k\delta$  für einen sehr kleinen Werth von  $\delta$  statt haben, wie es vorhin angeführt worden ist.



Wenn auf einen homogenen Körper beliebige innere und äussere Kräfte wirken, so wird man den äusseren Druck in zwei Theile zerlegen können, von denen der eine eine Kraft  $\Pi$  sei, welche in allen Punkten der Oberfläche dieselbe, nemlich constant ist, und normal auf letztere wirkt. Dieser Theil der Kraft nun wird eine ebenfalls constante Linearcontraction hervorbringen, welche durch  $\delta$  dargestellt sein mag, und man wird sodann diesen Zustand der Zusammendrückung als einen ursprünglichen Zustand des Körpers ansehen und demnächst die Ortsverrückung eines beliebigen Molecüls, welche von den inneren Kräften und dem zweiten Theil der äusseren Kraft herühren, durch  $u, v, w$  darstellen können. Auf diese Weise werden sich die neun Kräfte  $P_1, Q_1$  u. w. s. der Nro. 22 nicht mehr auf nur sechs ungleiche Kräfte reduciren und sie werden von den Kräften  $P'_1, Q'_1$  u. s. w. um diejenigen Glieder differiren, welche von  $K$  abhängig sind, welches seinerseits constant und gleich  $\Pi$  sein wird. In dem Falle z. B., wenn der Körper sich nicht im leeren Raume sondern in der Luft befindet, wird es bequem sein, den atmosphärischen Druck als den vorbezeichneten Antheil  $\Pi$  des Drucks, welchem er ausgesetzt ist, anzunehmen.

28. Wir müssen noch bemerklich machen, dass in einem homogenen oder heterogenen Körper, auf den gegebene Kräfte wirken, die von einem Punkte zum andern beliebig wechseln mögen, der innere Druck nur dann normal auf die angegriffene Ebene wirken und nach allen Richtungen hin um einen und denselben Punkt herum gleich sein kann, wenn die Linear-Ausdehnung ebenfalls nach allen Richtungen hin um diesen Punkt herum dieselbe ist, und umgekehrt.

Denn wenn die Mittelkraft der durch die Gleichungen (9) bestimmten Seitenkräfte  $P, Q, R$ , dieser Bedingung genügen soll, so ist es nöthig, dass für alle Werthe von  $c, c', c''$  sei:

$$P_1 c'' + P_2 c' + P_3 c = Nc,$$

$$Q_1 c'' + Q_2 c' + Q_3 c = Nc',$$

$$R_1 c'' + R_2 c' + R_3 c = Nc'',$$



wo die Grösse  $N$  von diesen drei Cosinus unabhängig ist. Es müssen also zuvörderst die Kräfte  $P_1, P_2, Q_1, Q_3, R_2, R_3$  Null sein, und diess giebt, wegen der Gleichungen unter (11)

$$\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} = 0, \quad \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} = 0, \quad \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} = 0. \quad (14)$$

Ferner müssen die drei andern Kräfte  $P_3, Q_2, R_1$  untereinander gleich sein, wozu, denselben Gleichungen zufolge, erforderlich ist, dass die Grössen  $\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dy}, \frac{dw}{dz}$  einerlei Werthe haben. Bezeichnet man diese mit  $\eta$ , so hat man mithin auch

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy} = \frac{dw}{dz} = \eta. \quad (15)$$

In Folge dieser Gleichungen (14) und (15) giebt aber die Gleichung (4) für die Linearausdehnung  $\frac{r'-r}{r}$  nach der durch die Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$  bestimmten Richtung einen Werth, welcher von diesen Winkeln unabhängig und gleich  $\eta$  ist. Dagegen ist umgekehrt für den Fall, wenn diese Winkel aus der Formel (4) verschwinden sollen und wenn die Ausdehnung nach allen Richtungen hin dieselbe sein soll, erforderlich, dass die Gleichungen (14) und (15) statt haben, und folglich, dass auch der Druck normal und nach allen Richtungen hin derselbe sei.

Beachten wir noch, dass, wenn die Gleichungen (14) und (15) statt haben, die Grösse  $\eta$  nur eine Constante oder eine lineaire Function der Veränderlichen  $x, y, z$  sein kann. Denn, wenn man mittelst angemessener Differenziationen die drei Unbekannten aus diesen Gleichungen eliminirt, so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{d^2\eta}{dx^2} &= 0, & \frac{d^2\eta}{dy^2} &= 0, & \frac{d^2\eta}{dz^2} &= 0, \\ \frac{d^2\eta}{dx\,dy} &= 0, & \frac{d^2\eta}{dx\,dz} &= 0, & \frac{d^2\eta}{dy\,dz} &= 0; \end{aligned}$$

und hieraus

$$\eta = \alpha + \beta x + \beta' y + \beta'' z,$$



wo  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\beta'$ ,  $\beta''$  willkürliche Constanten sind. In festen Körpern kann mithin die lineare Contraction nicht allen Richtungen hin um jeden Punkt herum gleich sein und zu gleicher Zeit von einem Punkte zum andern in irgend einer Weise sich ändern. Indessen ist es gut, schon jetzt zu bevorworten, dass diese Beschränkung nicht für die Fluida statt hat und dass in diesen im Gegentheil die Linear-Contraction um jeden Punkt herum nach allen Richtungen hin gleich ist, demungeachtet aber von dem einen Punkte zum andern wechselt und zwar kann diess nach jedem beliebigen Gesetz geschehen, wie diess des letzteren Abhängigkeit von der Natur des Fluidums und derjenigen gegebenen Kräfte ergiebt, welche auf die Molecüle wirken.

29. Die Gleichungen (12) können durch andere ersetzt werden, die gleichbedeutend mit jenen sind, deren Gebrauch jedoch zuweilen bequemer ist. Betrachten wir ein beliebiges Stück des Körpers; sei  $dm$  das Differenzial-Element seiner Masse, so dass  $dm = \rho dx dy dz$  ist, wo  $\rho$ , wie früher, die Dichtigkeit bedeutet. Man multiplicire die erste der Gleichungen unter (12) mit  $dm$ , integrir die beiden Seiten der Gleichung und erstrecke die Integrale auf das betrachtete Stück des Körpers. Dann hat man

$$\int X dm = \iiint \left( \frac{dP_1}{dz} + \frac{dP_2}{dy} + \frac{dP_3}{dx} \right) \rho dx dy dz.$$

Nehmen wir der grössern Anschaulichkeit wegen an, dass die Ebene der  $x$ ,  $y$  horizontal und die Axe der  $z$  vertical von unten nach oben gerichtet sei, so wie auch, dass jede Verticallinie die Oberfläche des von uns betrachteten Körpertheils in nicht mehr als zwei Punkten treffe, dann werden wir

$$\iiint \frac{dP_1}{dz} \rho dx dy dz = \iint (P_1 \rho) dx dy - \iint [P_1 \rho] dx dy$$

haben, wo  $(P_1 \rho)$  und  $[P_1 \rho]$  Werthe von  $P_1 \rho$  sind, die sich auf zwei beliebige Punkte der Oberfläche beziehen, welche dieselbe Horizontalprojection haben und wo das erste doppelte Integral sich auf alle oberen Punkte und das zweite auf alle unteren erstreckt. Bezeichnen wir nun denjenigen Winkel,



den der ausserhalb liegende Theil der Normale irgend eines beliebigen Punktes mit der Axe der positiven  $z$  einschliesst, mit  $\gamma$ , und das entsprechende Differenzial - Element der Oberfläche mit  $ds$ , so ist

$$dx dy = \cos \gamma \cdot ds \quad \text{oder} \quad dx dy = - \cos \gamma \cdot ds,$$

jenachdem es sich um einen oberen Punkt handelt, für welchen  $\cos \gamma$  positiv, oder um einen unteren, für welchen dieser Cosinus negativ ist. Hiernach reducirt sich die Differenz der zwei Doppel-Integrale auf ein einziges Integral, welches sich über die ganze Oberfläche erstreckt, und man hat einfach

$$\iiint \frac{dP_1}{dz} \rho \, dx \, dy \, dz = \int P_1 \cos \gamma \cdot ds,$$

sowie ganz analog

$$\iiint \frac{dP_2}{dy} \rho \, dx \, dy \, dz = \int P_2 \cos \beta \cdot ds,$$

$$\iiint \frac{dP_3}{dx} \rho \, dx \, dy \, dz = \int P_3 \cos \alpha \cdot ds,$$

wenn  $\beta$  und  $\alpha$  die Winkel bedeuten, welche der äussere Theil der Normale beziehlich mit den Axen der positiven  $y$  und  $x$  einschliesst. Daraus folgt sodann

$$\int X \, dm = \int (P_1 \cos \gamma + P_2 \cos \beta + P_3 \cos \alpha) \, ds,$$

und wenn man mit den zwei letzten Gleichungen unter (12) in derselben Weise verfährt,

$$\int Y \, dm = \int (Q_1 \cos \gamma + Q_2 \cos \beta + Q_3 \cos \alpha) \, ds,$$

$$\int Z \, dm = \int (R_1 \cos \gamma + R_2 \cos \beta + R_3 \cos \alpha) \, ds.$$

Diese drei Gleichungen sind nun in Bezug auf ein beliebiges Stück des Körpers das, was die Gleichungen (12) in Bezug auf einen ausserordentlich kleinen Theil seiner Masse waren. Wenn ein Theil der Oberfläche jenes



beliebigen Stücks mit der Oberfläche des Körpers selbst zusammenfällt, so hat man für alle Punkte derselben

$$c = \cos \alpha, \quad c' = \cos \beta, \quad c'' = \cos \gamma,$$

und es gehen sodann die soeben gebildeten Gleichungen wegen der Gleichungen unter (13) über in

$$\left. \begin{aligned} \int X \, dm &= \int (P_1 \cos \gamma + P_2 \cos \beta + P_3 \cos \alpha) \, ds - \int X, \, ds, \\ \int Y \, dm &= \int (Q_1 \cos \gamma + Q_2 \cos \beta + Q_3 \cos \alpha) \, ds - \int Y, \, ds, \\ \int Z \, dm &= \int (R_1 \cos \gamma + R_2 \cos \beta + R_3 \cos \alpha) \, ds - \int Z, \, ds. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Die ersten Integrale in den zweiten Gliedern entsprechen denjenigen Antheilen der Oberfläche, welche in das Innere des Körpers fallen, die zweiten aber denen, welche der äusseren Oberfläche angehören; diese, wie jene, so wie auch die Integrale der ersten Glieder beziehen sich auf den in Rede stehenden Körpertheil, insofern er seine Form noch nicht geändert hat.

30. Wenn es sich um den ganzen Körper handelt, so werden die Gleichungen (16) nur die gegebenen Kräfte enthalten, welche in dem Innern und an der Oberfläche des Körpers thätig sind und sie werden sich dann in

$$\begin{aligned} \int X \, dm + \int X, \, ds &= 0, \\ \int Y \, dm + \int Y, \, ds &= 0, \\ \int Z \, dm + \int Z, \, ds &= 0 \end{aligned}$$

zusammenziehen. Diese drei Gleichungen drücken aus, dass der Körper keine fortschreitende Bewegung annehmen kann, welche allen seinen Punkten gemeinsam wäre.

Aus den Gleichungen (12) und (13) wird man gleichfalls diejenigen ableiten können, welche ausdrücken, dass auch keine Rotationsbewegung



statt haben könne, welche allen Punkten des Körpers gemeinsam wäre. Den zwei ersten Gleichungen unter (12) zufolge hat man

$$\begin{aligned} \rho X(y+v) - \rho Y(x+u) &= \frac{d[(y+v)P_1 - (x+u)Q_1]}{dz} - \frac{dv}{dz}P_1 + \frac{du}{dz}Q_1 \\ &+ \frac{d[(y+v)P_2 - (x+u)Q_2]}{dy} - \frac{dv}{dy}P_2 + \frac{du}{dy}Q_2 - P_2 \\ &+ \frac{d[(y+v)P_3 - (x+u)Q_3]}{dx} - \frac{dv}{dx}P_3 + \frac{du}{dx}Q_3 + Q_3. \end{aligned}$$

Benutzt man jedoch die Werthe von  $P_1, Q_1$  u. s. w., welche durch die Formeln der Nro. 22 gegeben sind, und vernachlässigt man die Grössen, welche in Bezug auf  $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}$ , u. s. w. von der zweiten Ordnung sind, so reducirt sich diese Gleichung auf

$$\begin{aligned} \rho X(y+v) - \rho Y(x+u) &= \frac{d[(y+v)P_1 - (x+u)Q_1]}{dz} \\ &+ \frac{d[(y+v)P_2 - (x+u)Q_2]}{dy} + \frac{d[(y+v)P_3 - (x+u)Q_3]}{dx}. \end{aligned}$$

Die zwei ersten Gleichungen unter (13) geben auch

$$\begin{aligned} (y, + v,) X, - (x, + u,) Y, + [(y, + v,) P_1 - (x, + u,) Q_1] c'' \\ + [(y, + v,) P_2 - (x, + u,) Q_2] c' + [(y, + v,) P_3 - (x, + u,) Q_3] c = 0, \end{aligned}$$

wo  $u,$  und  $v,$  das bedeuten, was aus  $u$  und  $v$  wird, wenn man darin  $x,, y,, z,$  an die Stelle von  $x, y, z$  setzt. Diese Gleichung aber und die vorhergehende haben dieselbe Form wie die Gleichungen (12) und (13), und es lässt sich daraus durch eine Analyse, ähnlich der in der vorigen Nummer, die nachstehende Gleichung ableiten:

$$\int [(y+v)X - (x+u)Y] dm + \int [(y, + v,) X, - (x, + u,) Y,] ds = 0,$$

die Integrale über die ganze Masse und Oberfläche des Körpers noch vor seiner Formveränderung erstreckt. Aus den übrigen Gleichungen unter



(12) und (13), und wenn man mit  $w$ , dasjenige bezeichnet, was aus  $w$  wird, wenn man darin  $x, y, z$  mit  $x,, y,, z,$  verwechselt, findet man auch

$$\int [(x + u)Z - (z + w)X] dm + \int [(x, + u,)Z, - (z, + w,)X,] ds = 0,$$

$$\int [(z + w)Y - (y + v)Z] dm + \int [(z, + w,)Y, - (y, + v,)Z,] ds = 0.$$

Diese drei Gleichungen sind diejenigen für das Gleichgewicht, welche man in der Statik durch die Betrachtung der Momente erhält.

Die Dazwischenkunft der gegenseitigen Wirkung der Molecülen ist es, wodurch es möglich wird, dass andere Kräfte sich das Gleichgewicht halten können, obgleich sie nicht einen und denselben Angriffspunkt haben, und nicht allein führt die Betrachtung dieser Molecularwirkung direct zu den bekannten sechs Gleichgewichts-Gleichungen für feste Körper, sondern es lässt sich auch daraus die allgemeine Gleichung ableiten, welche aus der Anwendung des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten auf das Gleichgewicht hervorgeht, wie man diess in Nro. 13 meiner Abhandlung über das Gleichgewicht und die Bewegung elastischer Körper des Näheren sehen kann.

31. Wenn der von uns bis hierher betrachtete Körper nicht im Gleichgewicht ist, wenn vielmehr seine Molecülen sehr kleine Schwingungen machen, so wird man den Prinzipien der Dynamik zufolge die Differenzialgleichungen für diese Bewegung erhalten, wenn man in den Gleichungen, welche wir für den Fall des Gleichgewichts gefunden haben, an die Stelle der Kräfte  $X, Y, Z$  nunmehr

$$X - \frac{d^2 u}{dt^2}, \quad Y - \frac{d^2 v}{dt^2}, \quad Z - \frac{d^2 w}{dt^2}$$

setzt, wo die Zeit  $t$  als der Urvariable und mithin das Differenzial  $dt$  constant gedacht wird. Die Unbekannten  $u, v, w$  werden alsdann Functionen von  $x, y, z$  und  $t$  sein, welche die sehr kleinen Ortsveränderungen parallel zu den Axen der  $x, y, z$  nach Verlauf einer beliebigen Zeit  $t$  und für einen Punkt  $M$  ergeben, dessen Ort im natürlichen Zustande des Körpers den



Coordinaten  $x, y, z$  entsprach. Die Differenzial-Quotienten  $\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}, \frac{dw}{dt}$  werden dann die Seitengeschwindigkeiten des Punktes  $M$  nach denselben Richtungen und für denselben Zeitpunkt angeben.

Setzt man nun übrigens in den Gleichungen (12) an die Stelle von  $P, Q$  u. s. w. ihre Werthe, nimmt man dabei den Körper als homogen an, und denkt man sich unter dem natürlichen Zustande des Körpers, wo die Coordinaten  $x, y, z$  einem beliebigen Punkte  $M$  angehören, einen solchen Zustand, in welchem die Oberfläche des Körpers in allen ihren Punkten einen normalen und durchweg gleichen Druck erleidet, so ist, wenn man diesen Druck mit  $\Pi$  bezeichnet, nach Nro. 27,  $K = \Pi$ . Derselben Nummer zufolge ist  $k$  negativ und unabhängig von  $x, y, z$ . Setzt man nun der Abkürzung wegen,

$$-\frac{5k}{\rho} = a^2,$$

so kommt endlich vermöge der Gleichungen der Nro. 22

$$X - \frac{d^2u}{dt^2} + a^2 \left( \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{2}{3} \frac{d^2v}{dydx} + \frac{2}{3} \frac{d^2w}{dzdx} + \frac{1}{3} \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{1}{3} \frac{d^2u}{dz^2} \right) = \frac{\Pi d^2u}{\rho dx^2},$$

$$Y - \frac{d^2v}{dt^2} + a^2 \left( \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{2}{3} \frac{d^2u}{dxdy} + \frac{2}{3} \frac{d^2w}{dzdy} + \frac{1}{3} \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{1}{3} \frac{d^2v}{dy^2} \right) = \frac{\Pi d^2v}{\rho dy^2},$$

$$Z - \frac{d^2w}{dt^2} + a^2 \left( \frac{d^2w}{dz^2} + \frac{2}{3} \frac{d^2u}{dxdz} + \frac{2}{3} \frac{d^2v}{dydz} + \frac{1}{3} \frac{d^2w}{dx^2} + \frac{1}{3} \frac{d^2w}{dy^2} \right) = \frac{\Pi d^2w}{\rho dz^2}.$$

Man kann, wenn man will, die zweiten Glieder dieser Gleichungen wegschaffen, indem man unter den Ortsveränderungen  $u, v, w$  diejenigen mitbegreift, welche aus der durch den Druck  $\Pi$  hervorgebrachten Zusammenpressung des Körpers hervorgehen.

Die Gleichungen (13) sind gültig, es mag Gleichgewicht oder Bewegung statt haben. Da es indessen ganz der Willkühr anheim gestellt ist, welchen Zustand des Körpers man als den natürlichen ansehen will, so muss man jedenfalls beachten, dass es für den Fall der Bewegung vorkommen kann, dass jener Zustand diesen Gleichungen nicht Genüge thut. In einem



solchen Falle werden letztere nur dann auch für die ersten Augenblicke der Bewegung gültig sein, wenn man diejenigen Kräfte mit in Rechnung stellt, welche den Anfangszustand hervorgebracht haben. Ein Beispiel dafür findet man in dem zweiten Paragraphen der vorangeführten Abhandlung.

#### §. IV.

#### *Berechnung der Molecular - Pressungen in den cristallisirten Körpern; allgemeine Erörterungen über diese Drucke in den Fluiden und in festen Körpern.*

32. Es wird vorausgesetzt, dass die Molecülen in Körpern der vorangeführten Art regelmässig vertheilt liegen, und dass sie sich mittelst ihrer verschiedenen Seiten auch in verschiedener Weise anziehen oder abstossen. Wenn man daher die Wirkung von einem Theile des Körpers auf einen andern Theil berechnen will, so ist es aus jenem Grunde nicht erlaubt, die gegenseitige Einwirkung zweier Molecüle als eine einfache Function der Entfernung zwischen beiden zu betrachten, wie wir diess bisher gethan haben, wenn die beiden Theile des Körpers eine ausserordentlich grosse Anzahl von Molecülen enthielten. Wenn von einem homogenen Körper in seinem natürlichen Zustande die Rede ist, wo keine fremde Kraft auf ihn wirkt, so wird man ihn als eine Vereinigung gleichartiger und gleichgeformter Molecüle ansehen können, wo die homologen Schnitte unter sich parallel und die Schwerpunkte auf Systemen von geraden Linien nebeneinander geordnet sind, welche in gleichen Abständen parallel nebeneinander liegen; in jedem solchen System von parallelen Linien für sich werden auch die Schwerpunkte gleiche Abstände unter sich haben, aber diese Abstände werden im Allgemeinen von dem einen System zum andern wechseln. In einem heterogenen Körper wird derselbe Zustand um jeden Punkt für sich herum statthaben; derselbe wird aber von dem einen Punkte zum andern in unmerklichen Abstufungen sich ändern.

Somit mögen nun  $M$  und  $M'$  die Schwerpunkte zweier benachbarter Molecüle sein; ferner  $r$  die Entfernung  $MM'$ ;  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  die Winkel, welche diese gerade Linie mit drei festen und parallelen Linien dieser Molecüle



einschliesst, z. B. mit ihren drei Hauptsachen; dann wird sich die Wirkung des einen Molecüls auf das andere in drei aufeinander senkrechte Seitenkräfte zerlegen, welche sich möglicherweise nicht auf eine einzige, längs  $MM'$  wirkende, Kraft werden zurückführen lassen, deren Intensitäten jedoch Functionen von  $r, \alpha, \beta, \gamma$  sein werden. Wir wissen dann nur, dass jede von diesen Functionen nur merkliche Werthe hat, so lange die Werthe von  $r$  unmerklich bleiben, ihre Zusammensetzung aber in Betreff der Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$  wird von der Form und der jedesmaligen Anordnung der Molecüle abhängen und uns gänzlich unbekannt sein, eben so wohl, wie der Unterschied zwischen den Molecular-Intervallen, wenn man von einer Reihe von Molecülen zu einer andern nicht parallelen Reihe übergeht. Um indessen ein Beispiel von der Berechnung der Moleculardrucke im Innern der Cristalle zu geben, wollen wir für die gegenseitige Einwirkung und die Vertheilung der Molecüle eine besondere Hypothese aufstellen, welche sehr geeignet sein wird, die Frage aufzuklären und ihre Schwierigkeiten zu zeigen.

33. Seien  $M$  und  $M'$  die Schwerpunkte zweier Molecülen, von denen jedes sich in der Wirkungssphäre des andern befindet. Seien  $x, y, z$  die rechtwinkligen Coordinaten von  $M$  und  $x + x', y + y', z + z'$  die Coordinaten von  $M'$ , bezogen auf dieselben Axen. Nehmen wir an, dass jeder der drei Veränderlichen  $x', y', z'$ , bei dem Uebergange von dem einen Punkte  $M'$  zu einem andern im Innern des Körpers, um constante Unterschiede wächst, so dass man

$$x' = n\varepsilon, \quad y' = n'\varepsilon', \quad z' = n''\varepsilon''$$

hat, wo  $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$  positive Constanten,  $n, n'$  und  $n''$  aber ganze Zahlen sind, welche positiv oder negativ oder Null sein können. Somit sind nun die Schwerpunkte der Molecüle auf geraden Linien nebeneinander geordnet, welche den Axen der  $x, y, z$  parallel liegen und befinden sich auf jeder dieser geraden Linien in sich in gleichen Abständen von einander, während die Molecular-Intervallen, die nach der Richtung der einen jener Axen statt haben, von denen nach der Richtung einer andern Axe verschieden sein können. Der bessern Anschaulichkeit wegen, wollen wir die Axe der  $x$  vertical annehmen



und auf der durch den Punkt  $M$  gelegten geraden Linie die  $x'$  in der Richtung der Schwere als positiv ansehen.

Sei ferner  $M$ , der Schwerpunkt eines Molecüls, welches in der Verlängerung der eben genannten Linie in der Entfernung  $u$  unter dem Punkte  $M$  liegt, so dass  $u$  ein Vielfaches von  $\varepsilon$  bezeichnet, welches mit  $n, \varepsilon$  bezeichnet werden mag. Sodann werde die gegenseitige Wirkung der beiden Molecüle, welche den Punkten  $M'$  und  $M$ , entsprechen, nach der Richtung der Coordinatenaxen zerlegt und jede der Seitenkräfte nach den Axen der  $x, y, z$  bezüglich mit

$$(x' + u)\varphi(x' + u, y', z'), \quad y'\varphi'(x' + u, y', z'), \quad z'\varphi''(x' + u, y', z')$$

bezeichnet, dergestalt, dass  $\varphi, \varphi', \varphi''$  Functionen bedeuten, von denen jede unmerklich oder Null wird, sobald einer der Veränderlichen  $x' + u, y', z'$  eine merkliche Grösse erlangt hat. Durch den Punkt  $M$  werde eine Horizontal-Ebene geführt, und es seien dann  $U, U', U''$  die den Axen der  $x, y, z$  parallelen Seitenkräfte, welche aus der Zerlegung der Wirkung hervorgehen, die von allen über und in dieser Ebene liegenden materiellen Punkten des Körpers auf alle diejenigen Punkte ausgeübt wird, welche in der durch den Punkt  $M$  geführten Verticallinie und dabei unter der genannten Ebene liegen. Wir haben dann

$$U = \Sigma (x' + u)\varphi(x' + u, y', z'),$$

$$U' = \Sigma y'\varphi'(x' + u, y', z'),$$

$$U'' = \Sigma z'\varphi''(x' + u, y', z'),$$

wo das Zeichen  $\Sigma$  vierfache Summen andeutet, welche sich auf alle Werthe von  $n'$  und  $n''$  von  $-\infty$  bis  $+\infty$  erstrecken,  $n' = 0$  und  $n'' = 0$  mit eingeschlossen; ferner auf alle positiven Werthe von  $n$ , von  $n = 0$  bis  $n = \infty$ ; und endlich auf alle positiven Werthe von  $n$ , mit Ausschluss des Werthes  $n = 0$ , von  $n = 1$  bis  $n = \infty$ .

Betrachtet man bloss die Summationen, welche sich auf  $n$  und  $n$ , beziehen, so hat jede dieser drei Grössen die Form

$$\Sigma_{n'}^{\infty} \Sigma_n^{\infty} f(n\varepsilon + n, \varepsilon),$$



und diese Doppelsumme ist gleichbedeutend mit

$$\sum_0^\infty n f(n\varepsilon),$$

wie man in Nro. 10 gesehen hat. Sonach kann man die Werthe von  $U$ ,  $U'$ ,  $U''$  auf Summen zurückführen, welche sich auf drei Veränderliche beziehen und man wird nachstehende Ausdrücke erhalten:

$$U = \frac{1}{\varepsilon} \sum x'^2 \varphi(x', y', z'),$$

$$U' = \frac{1}{\varepsilon} \sum x' y' \varphi'(x', y', z'),$$

$$U'' = \frac{1}{\varepsilon} \sum x' z' \varphi''(x', y', z').$$

Um die Untersuchung zu vereinfachen, wollen wir annehmen, dass jede der drei Functionen  $\varphi$ ,  $\varphi'$ ,  $\varphi''$  denselben Werth unverändert beibehält, wenn man darin das Vorzeichen von einem der drei Veränderlichen  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  ändert. Bei dieser Hypothese werden diejenigen Summen  $\Sigma$ , welche in den beiden letzten Gleichungen vorkommen, Null werden, und es wird erlaubt sein, in der ersten Gleichung die Summe  $\Sigma$  auf alle, sowohl positiven, wie negativen, Werthe von  $x'$  zu erstrecken, sofern man nur zuletzt bloss die Hälfte des Resultats nimmt.

Auf diese Weise sind nun die horizontalen Seitenkräfte  $U'$  und  $U''$  gleich Null und die verticale Seitenkraft  $U$  ist ausgedrückt durch

$$U = \frac{1}{2\varepsilon} \sum x'^2 \varphi(x', y', z'), \quad (1)$$

wo das Summenzeichen  $\Sigma$  sich auf alle positiven, negativen und Null-Werthe der drei Veränderlichen  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  bezieht, deren Differenzen

$$\Delta x' = \varepsilon, \quad \Delta y' = \varepsilon', \quad \Delta z' = \varepsilon''$$

sind.

34. Gehen wir nun auf die Formel (3) der Nro. 5 zurück, oder auf die noch allgemeinere



$$\sum^n f(i\varepsilon) + \frac{1}{2}fo = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{n\varepsilon} fs ds + \frac{2}{\varepsilon} \int_0^{n\varepsilon} \left[ \sum_{i=1}^{\infty} \cos \frac{2i\pi s}{\varepsilon} \right] fs ds,$$

und ändern darin das Vorzeichen von  $\varepsilon$  um, so werden wir ebenmässig haben

$$\sum^n f(-i\varepsilon) + \frac{1}{2}fo = -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{-n\varepsilon} fs ds - \frac{2}{\varepsilon} \int_0^{-n\varepsilon} \left[ \sum_{i=1}^{\infty} \cos \frac{2i\pi s}{\varepsilon} \right] fs ds.$$

Vereinigt man beide Gleichungen und macht  $n = \infty$ , so kommt

$$\sum f(i\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} fs ds + \frac{2}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{i=1}^{\infty} \cos \frac{2i\pi s}{\varepsilon} \right] fs ds,$$

oder, was dasselbe ist,

$$\sum fs i\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \sum \cos \frac{2i\pi s}{\varepsilon} \right] fs ds,$$

wo sich nunmehr die Summenzeichen  $\sum$  auf alle Werthe der ganzen Zahl  $i$  von  $i = -\infty$  bis  $i = +\infty$  erstrecken, den Werth  $i = 0$  mit eingeschlossen.

Betrachtet man bloss den Variablen  $x'$ , so hat man, der letzten Gleichung zufolge,

$$\sum x'^2 \varphi(x', \dots) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \sum \cos \frac{2i\pi x'}{\varepsilon} \right] x'^2 \varphi(x', \dots) dx'.$$

Setzen wir der Abkürzung wegen

$$\sum x'^2 \varphi(x', \dots) = \psi(y', \dots),$$

so werden wir gleichfalls haben:

$$\sum \psi(y', \dots) = \frac{1}{\varepsilon'} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \sum \cos \frac{2i'\pi y'}{\varepsilon'} \right] \psi(y', \dots) dy',$$

und wenn wir



$$\Sigma \psi(y', \dots) = \Phi z'$$

setzen, zuletzt

$$\Sigma \Phi z' = \frac{1}{\varepsilon''} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \Sigma \cos \frac{2i'' \pi z'}{\varepsilon''} \right] \Phi z' dz'.$$

Substituirt man in dieser letzten Formel den Werth von  $\Phi z'$  und in dem daraus hervorgehenden Resultat den Werth von  $\psi(y', \dots)$ , so erhält man auf diese Weise den Ausdruck für die dreifache Summe  $\Sigma x'^2 \varphi(x', y', z')$ . Bezeichnet man sodann das Element  $dx' dy' dz'$  des Volumens mit  $dv$ , und kehrt die Ordnung der Characteren  $\int$  und  $\Sigma$  um, so giebt die Gleichung (1)

$$U = \frac{1}{2\varepsilon^2 \varepsilon' \varepsilon''} \Sigma \int \cos \frac{2i \pi x'}{\varepsilon} \cos \frac{2i' \pi y'}{\varepsilon'} \cos \frac{2i'' \pi z'}{\varepsilon''} x'^2 \varphi(x', y', z') dv,$$

wo das Integral über alle reellen Werthe von  $x', y', z'$  und die Summe über alle positiven, negativen und Nullwerthe der drei ganzen Zahlen  $i, i', i''$  auszudehnen ist.

Sondert man in dieser Summe das Glied ab, welches dem Fall  $i = 0, i' = 0, i'' = 0$  entspricht und verwandelt sodann das Product der drei Cosinus in die Summe von vier andern, und setzt der Abkürzung wegen

$$T = \Sigma x'^2 \varphi(x', y', z') \cos 2\pi \left( \frac{ix'}{\varepsilon} + \frac{i'y'}{\varepsilon'} + \frac{i''z'}{\varepsilon''} \right) dv,$$

so kommt

$$U = \frac{1}{8\varepsilon^2 \varepsilon' \varepsilon''} \Sigma (T + T_1 + T_2 + T_3) + \frac{1}{2\varepsilon^2 \varepsilon' \varepsilon''} \int x'^2 \varphi(x', y', z') dv. \quad (2)$$

$T_1, T_2, T_3$  bedeuten hier das, was aus  $T$  wird, wenn man darin successive das Vorzeichen von  $i'$ , das Vorzeichen von  $i''$ , und die Vorzeichen  $i'$  und  $i''$  zugleich, in die entgegengesetzten umändert. Die Summe  $\Sigma$  wird nur auf diejenigen Combinationen von  $i, i', i''$  erstreckt, wo die Werthe derselben nicht alle drei zu gleicher Zeit gleich Null sind; hierdurch wird es, wie man sogleich sehen wird, möglich, den Werth von  $T$  in einer sehr convergenten Reihe darzustellen.



35. Den Bezeichnungen der Nro. 32 zufolge ist

$$x' = r \cos \alpha, \quad y' = r \cos \beta, \quad z' = r \cos \gamma.$$

Ausserdem sei

$$\frac{i}{\varepsilon} = g \cos \alpha', \quad \frac{i'}{\varepsilon'} = g \cos \beta', \quad \frac{i''}{\varepsilon''} = g \cos \gamma',$$

$$\frac{i^2}{\varepsilon^2} + \frac{i'^2}{\varepsilon'^2} + \frac{i''^2}{\varepsilon''^2} = g^2,$$

$$\cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma' = \cos \theta.$$

Um den Punkt **M** als Mittelpunkt und mit einem als Einheit angenommenen Halbmesser beschreibe man eine Kugelfläche. Bezeichnet man sodann mit  $d\lambda$  das Element dieser Oberfläche, so ist

$$dv = r^2 dr d\lambda$$

dasjenige des Volumens und die Grösse **T** wird

$$T = \iint \cos (2\pi g r \cos \theta) \varphi (x', y', z') r^4 \cos \alpha^2 dr d\lambda.$$

Das eine dieser Integrale erstreckt sich auf alle Elemente der Kugelfläche, das andre auf alle Werthe von  $r$  und zwar von  $r = 0$  bis  $r = \infty$ .

Der Ausdruck für **T** kann nicht weiter vereinfacht werden, wenn man nicht in Betreff der Function  $\varphi$  etwas feststellt. So oft  $y$  eine rationale Function von  $r$ ,  $\cos \alpha^2$ ,  $\cos \beta^2$ ,  $\cos \gamma^2$ , und in Bezug auf die drei letzten Grössen auch eine ganze Function ist, wird man das Integral, welches sich auf die Kugeloberfläche bezieht, in endlicher Form erhalten. Da es sich aber hier nur um ein Beispiel für die Berechnung handelt, so werden wir, damit dasselbe nicht zu verwickelt werde, annehmen, dass  $\varphi$  nur Function von  $r$  sei und mithin

$$\varphi (x', y', z') = \frac{1}{r} fr$$

setzen, so dass  $fr \cos \alpha$  die verticale Seitenkraft für die gegenseitige Einwirkung der beiden Molecüle ist, deren Schwerpunkte **M** und **M'** sind. Setzt man der Abkürzung wegen



$$\int \cos(2\pi gr \cos\theta) \cos\alpha^2 d\lambda = q,$$

so erhält man für  $T$  den Ausdruck

$$T = \int_0^\infty q r^3 f r dr. \quad (3)$$

Um die Integration in Bezug auf die Elemente  $d\lambda$  zu bewirken, führe man durch den Punkt  $M$  eine gerade Linie  $MO$ , welche mit den Axen der  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  die constanten Winkel  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$  einschliesse. Aus dem Werthe für  $\cos\theta$  geht hervor, dass  $\theta$  der Winkel  $OMM'$  ist, welcher zwischen den geraden Linien  $MM'$  und  $MO$  liegt. Der Winkel, welcher von derjenigen festen Ebene eingeschlossen wird, welche man durch die Axe der  $x'$  und die gerade Linie  $MO$  legen kann, heisse  $\psi$ . Der Fundamental-Formel der sphärischen Trigonometrie zufolge hat man dann

$$\cos\alpha = \cos\theta \cdot \cos\alpha' + \sin\theta \sin\alpha' \cos\psi.$$

Man kann nun

$$d\lambda = \sin\theta d\theta d\psi$$

setzen und sodann in den Grenzen von  $\psi = 0$  und  $\theta = 0$  bis  $\psi = \pi$  und  $\theta = 2\pi$  integrieren. Dann erhalten wir zunächst

$$q = 2\pi \cos\alpha'^2 \int_0^\pi \cos(2\pi gr \cos\theta) \cos\theta^2 \sin\theta d\theta$$

$$+ \pi \sin\alpha'^2 \int_0^\pi \cos(2\pi gr \cos\theta) \sin\theta^3 d\theta,$$

und sodann

$$q = \frac{2\cos\alpha'^2}{gr} \left[ \sin(2\pi gr) + \frac{1}{\pi gr} \cos(2\pi gr) - \frac{1}{2\pi^2 g^2 r^2} \sin(2\pi gr) \right]$$

$$- \frac{\sin\alpha'^2}{\pi g^2 r^3} \left[ \cos(2\pi gr) - \frac{1}{2\pi gr} \sin(2\pi gr) \right].$$



Entwickelt man nun diesen Werth von  $q$  nach den Potenzen von  $g$ , und setzt sodann  $g = 0$ , so findet man  $q = \frac{4\pi}{3}$ . Diess bestätigt sich auch anderweit. Denn unter den vorangeführten Umständen ist  $q = \int \cos \alpha^2 d\lambda$ . Man kann nun  $d\lambda = \sin \alpha d\alpha d\psi'$  nehmen, wenn  $\psi'$  den Winkel bedeutet, den die durch  $MM'$  und die Axe der  $x'$  gelegte Ebene mit jeder andern Ebene einschliesst, welche willkürlich durch die letztere Ebene gelegt ist. Wenn man sodann in den Grenzen von  $\psi' = 0$  und  $\alpha = 0$  bis  $\psi' = \pi$  und  $\alpha = 2\pi$  integrirt, so kommt  $q = \frac{4\pi}{3}$ . Nur, wenn die drei Glieder  $i, i', i''$  zu gleicher Zeit gleich Null sind, kann  $g = 0$  sein; in jedem andern Falle ist  $g$  eine sehr grosse Zahl und es ist dann angemessener, die Integrale in Bezug auf  $r$  nach Potenzen von  $\frac{1}{g}$  zu entwickeln.

Integrirt man theilweise und beachtet, dass  $f$  und seine Differenzial-Quotienten an der Grenze  $r = \infty$  gleich Null sind, so hat man:

$$\int_0^\infty r^2 fr \sin(2\pi gr) dr = -\frac{2}{(2\pi g)^3} f + \frac{12}{(2\pi g)^5} f'' - \frac{30}{(2\pi g)^7} f^{IV} + \dots + \frac{(2n+2)(2n+1)}{(2\pi g)^{2n+3}} f^{(2n)} + u. s. w.$$

$$\int_0^\infty r fr \cos(2\pi gr) dr = -\frac{1}{(2\pi g)^2} f + \frac{3}{(2\pi g)^4} f'' - \frac{5}{(2\pi g)^6} f^{IV} + u. s. w.$$

$$\int_0^\infty fr \sin(2\pi gr) dr = \frac{1}{2\pi g} f - \frac{1}{(2\pi g)^3} f'' + \frac{1}{(2\pi g)^5} f^{IV} - u. s. w.,$$

unter  $f, f'', f^{IV}$ , u. s. w. diejenigen Werthe von  $fr, \frac{d^2 fr}{dr^2}, \frac{d^4 fr}{dr^4}$ , u. s. w. verstanden, welche dem Werthe  $r = 0$  entsprechen. Es ist folglich

$$\int_0^\infty q r^3 fr dr = -\frac{\cos \alpha'^2}{2\pi^3 g^4} \left[ 3f - \frac{10}{(2\pi g)^2} f'' + \frac{21}{(2\pi g)^4} f^{IV} - \dots \dots \dots + \frac{(n+2)(2n+1)+1}{(2\pi g)^{2n}} f^{(2n)} - u. s. w. \right]$$

$$+ \frac{\sin \alpha'^2}{2\pi^3 g^4} \left[ f - \frac{2}{(2\pi g)^2} f'' + \frac{3}{(2\pi g)^4} f^{IV} - u. s. w. \right]$$



und da

$$\cos \alpha'^2 = \frac{i^2}{\varepsilon^2 g^2}, \quad \sin \alpha'^2 = 1 - \frac{i^2}{\varepsilon^2 g^2},$$

so geht die Gleichung (3) über in

$$T = -\frac{2i^2}{\pi^3 \varepsilon^2 g^6} \left[ f - \frac{3}{(2\pi g)^2} f'' + \frac{6}{(2\pi g)^4} f^{IV} \dots + \frac{(n+2)(n+1)}{2(2\pi g)^{2n}} f^{(2n)} - u. s. w. \right] \\ + \frac{1}{2\pi^3 g^4} \left[ f - \frac{2}{(2\pi g)^2} f'' + \frac{3}{(2\pi g)^4} f^{IV} - \dots u. s. w. \dots \right]$$

Beachtet man, dass

$$\frac{d \left( \frac{1}{g^{2n+4}} \right)}{d\varepsilon} = -\frac{2(n+2)}{g^{2n+5}} \frac{dg}{d\varepsilon} = \frac{2(n+2)i^2}{\varepsilon^3 g^{2n+6}},$$

und setzt man der Abkürzung wegen

$$\frac{1}{2\pi^3 g^4} \left[ f - \frac{2}{(2\pi g)^2} f'' + \frac{3}{(2\pi g)^4} f^{IV} - \dots \right] = E,$$

so kann man den vorhergehenden Ausdruck für  $T$  in nachstehender Form schreiben:

$$T = E - \varepsilon \frac{dE}{d\varepsilon} = -\varepsilon^2 \frac{d \left( \frac{E}{\varepsilon} \right)}{d\varepsilon}.$$

Da die Molecular-Intervallen  $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$  im Vergleich zu dem Bereich der merklichen Werthe von  $fr$  als sehr klein vorausgesetzt worden sind, so sieht man in gleicher Weise, wie in Nro. 7, dass die Reihe für  $E$  ausserordentlich convergent ist.

36. Dieser Werth von  $T$  bleibt unverändert, wenn man darin die Vorzeichen von  $i'$ , oder von  $i''$ , oder von  $i'$  und  $i''$  in die entgegengesetzten umwandelt, man hat mithin  $T = T_1 = T_2 = T_3$ . Ueberdiess ist

$$\int \varphi(x', y', z') x'^2 dv = \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty r^3 fr dr;$$



die Gleichung (2) wird daher übergehen in

$$U = \frac{2\pi}{3\varepsilon^2\varepsilon'\varepsilon''} \left( \int_0^\infty r^3 f r \, dr - \frac{3}{4\pi} \sum \varepsilon^2 \frac{d\left(\frac{E}{\varepsilon}\right)}{d\varepsilon} \right). \quad (4)$$

Bezeichne  $w$  den Flächeninhalt eines Stückchens der durch den Punkt  $M$  gelegten Horizontal-Ebene, und nehmen wir an, dass die Abmessungen von  $w$  unmerklich, demungeachtet aber sehr gross im Verhältniss zu den Molecular-Intervallen seien. Welches immerhin der Umriss von  $w$  sein möge, so wird man doch das Verhältniss  $\frac{w}{\varepsilon'\varepsilon''}$  als die Zahl der materiellen Punkte, wie  $M$  einer ist, annehmen können, welche in genanntem Flächenstückchen enthalten sind; diese Zahl wird zugleich angeben, wie viel Verticalreihen von Molecülen der Cylinder in sich fasst, dessen Grundfläche  $w$  ist. Die Wirkung des über der Horizontalebene liegenden Theils des Cylinders, die in der Fläche  $w$  enthaltenen Molecülen mit eingeschlossen, auf denjenigen Theil des Cylinders, welcher unter der Horizontalebene liegt, wird gleich sein  $U \frac{w}{\varepsilon'\varepsilon''}$ , und wenn man diese Wirkung mit  $Vw$  bezeichnet, so wird

$$V = \frac{1}{\varepsilon'\varepsilon''} U$$

der Ausdruck für den auf die Einheit der Fläche bezogenen Druck sein, welcher in der auf der Ebene der  $x', y'$  senkrechten Richtung den Punkt  $M$  angreift.

Man setze

$$\varphi'(x', y', z') = \frac{1}{r} f, r, \quad \varphi''(x', y', z') = \frac{1}{r} f'', r,$$

so dass  $\cos\beta f, r$  und  $\cos\gamma f'', r$  die Seitenkräfte nach der Richtung der Axen der  $y'$  und  $z'$  sind, welche aus der Zerlegung der gegenseitigen Wirkung der zwei Molecüle entspringen, für welche  $M$  und  $M'$  die Schwerpunkte sind; in gleicher Weise ist dann  $\cos\alpha f, r$  die bezügliche Seitenkraft nach der Axe der  $x'$ ; wobei vorausgesetzt wird, dass die Richtung der geraden Linie  $MM'$  durch die drei Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$  bestimmt sei. Bedeuten nun  $V'$  und  $V''$  die ähnlichen Perpendiculardrucke bezüglich auf die Ebenen der  $x', z'$  und  $y', z'$ , wiederum bezogen auf die Einheit der Fläche und den Punkt  $M$ , so wird man den Werth



von  $V'$  aus dem von  $V$  erhalten, wenn man in letzterem  $\varepsilon$  und  $f$  beziehlich in  $\varepsilon'$  und  $f'$ , und den Werth von  $V''$ , wenn man  $\varepsilon$  und  $f$  beziehlich in  $\varepsilon''$  und  $f''$  umwandelt.

Bezeichne  $\rho$  die Dichtigkeit des Körpers im Punkte  $M$  und  $m$  die Masse eines seiner Molecüle, so hat man

$$\rho = \frac{m}{\varepsilon \varepsilon' \varepsilon''}.$$

Sodann sei

$$\frac{2\pi}{3m^2} fr = Fr, \quad \frac{2\pi}{3m^2} f'r = F'r, \quad \frac{2\pi}{3m^2} f''r = F''r.$$

Demnächst sei für einen beliebigen Exponenten  $2n$

$$\Sigma \frac{1}{(2\pi g)^{2n}} = \alpha_n,$$

wo das Summenzeichen  $\Sigma$  sich auf alle positiven, negativen und Nullwerthe der drei Zahlen  $i$ ,  $i'$  und  $i''$  bezieht, diejenigen Fälle ausgenommen, wenn alle drei zu gleicher Zeit gleich Null sind. Bezeichnet man endlich das, was aus  $Fr$ ,  $\frac{d^2 Fr}{dr^2}$ , u. s. w.,  $F'r$ ,  $\frac{d^2 F'r}{dr^2}$ , u. s. w.,  $F''r$ ,  $\frac{d^2 F''r}{dr^2}$ , u. s. w. wird, wenn man darin  $r = 0$  setzt, beziehlich mit  $F$ ,  $F''$ , u. s. w.,  $F'$ ,  $F''$ , u. s. w.,  $F''$ ,  $F''$ , u. s. w., und setzt der Abkürzung wegen

$$\alpha_2 F - 2\alpha_3 F'' + 3\alpha_4 F^{iv} - 4\alpha_5 F^{vi} + u. s. w. = H,$$

$$\alpha_2 F' - 2\alpha_3 F'' + 3\alpha_4 F^{iv} - 4\alpha_5 F^{vi} + u. s. w. = H',$$

$$\alpha_2 F'' - 2\alpha_3 F'' + 3\alpha_4 F^{iv} - 4\alpha_5 F^{vi} + u. s. w. = H'',$$

so wird man in Folge der Gleichung (4) die nachstehenden haben:

$$\left. \begin{aligned} V &= \rho^2 \left( \int_0^\infty r^3 Fr dr + 6\varepsilon^2 \frac{d\left(\frac{H}{\varepsilon}\right)}{d\varepsilon} \right), \\ V' &= \rho^2 \left( \int_0^\infty r^3 F'r dr + 6\varepsilon'^2 \frac{d\left(\frac{H'}{\varepsilon'}\right)}{d\varepsilon'} \right), \\ V'' &= \rho^2 \left( \int_0^\infty r^3 F''r dr + 6\varepsilon''^2 \frac{d\left(\frac{H''}{\varepsilon''}\right)}{d\varepsilon''} \right). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$



Wenn der von uns betrachtete cristallisirte Körper homogen und nicht der Wirkung einer innern Kraft unterworfen ist, welche ihn in seinen verschiedenen Punkten ungleichmässig comprimirt, so werden die Grössen  $Fr$ ,  $F_r$ ,  $F_{rr}$ , und die Intervallen  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon'$ ,  $\varepsilon''$  sich nicht mit  $x$ ,  $y$  und  $z$  zugleich ändern, und in Folge hiervon wird dann dasselbe auch in Betreff der drei Kräfte  $V$ ,  $V'$ ,  $V''$  stattfinden.

37. Aus der Art und Weise, wie die Gleichungen (9), (12) und (13) des vorhergehenden Paragraphen gebildet worden sind, leuchtet ein, dass sie von der Constitution des Körpers unabhängig sind, und dass sie auch in dem vorliegenden Falle gültig sein müssen, wenn man darin

$$P_3 = V, \quad Q_2 = V', \quad R' = V'',$$

die sechs übrigen Kräfte  $P_1$ ,  $Q_1$  u. s. w. aber gleich Null setzt. Die Gleichungen (9) geben sodann

$$P = Vc, \quad Q = V'c', \quad R = V''c''$$

für die Axen der  $x$ ,  $y$ ,  $z$  beziehlich parallelen Seitenkräfte, welche durch die Zerlegung des auf irgend eine beliebige Ebene ausgeübten Drucks entstehen, wenn  $c$ ,  $c'$ ,  $c''$  die Cosinus derjenigen Winkel sind, welche die Normale für jene Ebene mit den Axen der  $x$ ,  $y$ ,  $z$  einschliesst. Die Gleichungen (12) werden identisch werden, weil die innern Kräfte  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  gleich Null vorausgesetzt, und die Werthe von  $V$ ,  $V'$ ,  $V''$  constant sind. Denkt man sich den Körper einem äussern Druck  $\Pi$  ausgesetzt, welcher in der ganzen Ausdehnung der Oberfläche constant und normal wirkt, so geben die Gleichungen (13)

$$\Pi - V = 0, \quad \Pi - V' = 0, \quad \Pi - V'' = 0.$$

Macht man darin  $\Pi = 0$ , so werden sie die Werthe von  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon'$ ,  $\varepsilon''$  kennen lehren, welche sich auf den natürlichen Zustand des Körpers beziehen. Wenn diese Molecular-Intervallen sodann für irgend einen Werth von  $\Pi$  in  $\varepsilon(1 - \delta)$ ,  $\varepsilon'(1 - \delta')$ ,  $\varepsilon''(1 - \delta'')$  übergehen und die Contractionen  $\delta$ ,  $\delta'$ ,  $\delta''$  sehr kleine Bruchzahlen sind, deren Quadrate und Producte man vernachlässigt, so wird man zur Bestimmung ihrer Werthe die drei nachstehenden linearen Gleichungen haben:



$$\Pi + \frac{dV}{d\varepsilon} \varepsilon \delta + \frac{dV}{d\varepsilon'} \varepsilon' \delta' + \frac{dV}{d\varepsilon''} \varepsilon'' \delta'' = 0,$$

$$\Pi + \frac{dV'}{d\varepsilon} \varepsilon \delta + \frac{dV'}{d\varepsilon'} \varepsilon' \delta' + \frac{dV'}{d\varepsilon''} \varepsilon'' \delta'' = 0,$$

$$\Pi + \frac{dV''}{d\varepsilon} \varepsilon \delta + \frac{dV''}{d\varepsilon'} \varepsilon' \delta' + \frac{dV''}{d\varepsilon''} \varepsilon'' \delta'' = 0.$$

Im Allgemeinen werden die Werthe von  $\delta$  ungleich sein; der Körper wird sich ähnlich bleiben und sein Volumen wird sich in dem Verhältniss von  $1 - \delta - \delta' - \delta''$  zur Einheit ändern. Und ferner wird der Körper, wenn man einen und denselben Druck nach und nach auf seine verschiedenen Seitenflächen wirken lässt, auch verschiedene Grade der Zusammendrückung erleiden, welche von der Richtung dieser Kraft in Bezug auf die parallelen Reihen der Molecülen abhängig sein werden. Die Beobachtung bei cristallisirten Körpern bestätigt diess.

Wenn die drei Kräfte  $Fr$ ,  $F'r$ ,  $F''r$  unter sich, sowie auch  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon'$  und  $\varepsilon''$  unter sich gleich sind, so werden auch die Drucke  $V$ ,  $V'$ ,  $V''$  unter sich gleich sein; folglich wird dann die Mittelkraft aus den Kräften  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  in normaler Richtung gegen die bezügliche Ebene wirken und für alle möglichen Lagen dieser Ebene gleich  $V$  sein. Was den Werth von  $V$  betrifft, so wird man in Folge des Werthes von  $H$  und in Folge der ersten der Gleichungen unter (5) in diesem Falle haben:

$$V = \rho^2 \left[ \int_0^\infty r^3 Fr dr - \frac{9\varepsilon^4 F}{8\pi^4} \Sigma \frac{1}{(i^2 + i'^2 + i''^2)^2} + \frac{15\varepsilon^6 F''}{16\pi^6} \Sigma \frac{1}{(i^2 + i'^2 + i''^2)^4} - u. s. w. \right]. \quad (6)$$

wo, wie man sieht, die Glieder in der Parenthese, vom zweiten ab, die Producte  $\varepsilon^4 F$ ,  $\varepsilon^6 F''$ ,  $\varepsilon^8 F''''$  u. s. w. zu Factoren haben, welche sehr schnell abnehmen. In diesem besondern Falle wird der Körper in allen Richtungen gleichmässig zusammengedrückt werden und unter der Einwirkung der auf alle Punkte seiner Oberfläche wirkenden Kraft  $\Pi$  in Bezug auf seine Form sich ähnlich bleiben.



38. Denken wir uns abermals einen Körper, dessen Constitution ganz beliebig sein mag, und der mithin cristallisirt oder nicht, homogen oder heterogen sein kann. In dem Innern dieses Körpers werde ein Punkt  $M$  hervorgehoben, dessen ursprüngliche Coordinaten  $x, y, z$  gewesen sein mögen, und welcher nach drei aufeinander rechtwinkligen Richtungen Ortsverrückungen  $u, v, w$  erlitten hat, die durch irgendwie gegebene Kräfte hervorgebracht sind und den natürlichen Zustand des Körpers sowie seine Form mehr oder weniger geändert haben. Die Ortsverrückungen  $u, v, w$  und ihre Differenzial-Quotienten mögen so klein angenommen sein, dass man ihre Producte und ihre Potenzen, von der zweiten an, vernachlässigen könne. Denkt man sich durch den Punkt  $M$  beliebig eine Ebene gelegt, so werden in dem natürlichen Zustande des Körpers, welchem die Werthe  $u = 0, v = 0, w = 0$  entsprechen, die Seitenkräfte für den Druck, den jene Ebene erleiden könnte, Null sein, und da dieselben in dem folgenden Zustande des Körpers nur von den relativen Ortsverrückungen der Molecüle abhängig sein können, so werden die Ausdrücke für sie lineaire Functionen von  $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy},$  u. s. w. sein. Der Werth für jede dieser Kräfte wird daher aus neun Gliedern zusammengesetzt sein und in nachstehender Weise dargestellt werden können

$$A \frac{du}{dx} + B \frac{dv}{dy} + C \frac{dw}{dz} + D \frac{du}{dy} + E \frac{du}{dz} + F \frac{dv}{dz} \\ + D' \frac{dv}{dx} + E' \frac{dw}{dx} + F' \frac{dw}{dy},$$

wo  $A, B,$  u. s. w. im Falle der Homogenität constant sind, dagegen Functionen von  $x, y, z,$  wenn der Körper heterogen ist. Vorstehendes ist die allgemeinste Form des Ausdrucks, welche man für die aus der Molecular-Wirkung entspringenden inneren Drucke sich denken kann. Wenn man daher die neun Seitenkräfte für die auf drei untereinander senkrechte Ebenen ausgeübten Drucke betrachtet, welche in die Gleichungen (12) und (13) für das Gleichgewicht eines Körpers von beliebiger Art eingehen, so werden sämtliche Werthe im Ganzen höchstens einundachtzig Coefficienten enthalten, welche von der Natur des Körpers abhängen und in jedem besonderen Falle



gegeben sein müssen. Durch die nachfolgenden Betrachtungen lassen sich aber jene einundachtzig Grössen auf sechsunddreissig zurückführen.

Nehmen wir an, dass die Ortsverrückungen  $u, v, w$  beziehlich den Axen der  $x, y, z$  parallel seien. Lässt man nun den Körper sich um die Axe der  $x$  drehen, so dass jeder seiner Punkte einen sehr kleinen Winkel (bogen)  $\alpha$  durchläuft, so hat man

$$u = -\alpha y, \quad v = \alpha x, \quad w = 0,$$

mithin, da der Winkel  $\alpha$  constant ist,

$$\frac{du}{dy} = -\alpha, \quad \frac{dv}{dx} = \alpha,$$

und die sieben andern Grössen  $\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dy}$  u. s. w. werden gleich Null sein. Bei einer solchen Drehung aber bleibt der Körper in seinem natürlichen Zustande und die inneren Drucke sind mithin Null; es muss also  $D' = D$  sein. Lässt man den Körper sodann successive sich um die Axen der  $y$  und der  $z$  drehen, so zeigt sich in gleicher Weise, dass  $E' = E, F' = F$  sein müsse, und der vorhin angegebene Ausdruck reducirt sich auf

$$A \frac{du}{dx} + B \frac{dv}{dy} + C \frac{dw}{dz} \\ + D \left( \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right) + E \left( \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} \right) + F \left( \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \right),$$

worin nur noch sechs von einander verschiedene Coefficienten vorkommen.

Von einer andern Seite ist es für das Gleichgewicht eines rechtwinkligen Parallelepipeds von unmerklicher Ausdehnung erforderlich, dass die neun Seitenkräfte, in welche sich die auf drei nicht parallele Seitenflächen wirkenden Kräfte zerlegen lassen, sich auf sechs Kräfte reduciren, welche ungleich sein können. Dieser Satz rührt von Herrn *Cauchy* her und folgt aus der Betrachtung der Momente, wie aus Nachstehendem ersichtlich ist.

Seien  $l, l', l''$  die unmerklichen Längen der drei Seiten eines Parallelepipeds, welche beziehlich den Axen der  $x, y, z$  parallel sind. Nach denselben Richtungen denke man sich die Drucke zerlegt, welche auf die drei nicht parallelen Seiten des Parallelepipeds wirken, und es seien



$$P_1 l l', \quad Q_1 l l', \quad R_1 l l'$$

die daraus hervorgehenden beziehlichen Seitenkräfte für denjenigen Druck, welcher eine der zur Axe der  $z$  normalen Seitenflächen angreift. Dasselbe seien

$$P_2 l l'', \quad Q_2 l l'', \quad R_2 l l''$$

in Bezug auf eine der zur Axe der  $y$  normalen Seitenflächen und

$$P_3 l' l'', \quad Q_3 l' l'', \quad R_3 l' l''$$

in Bezug auf eine der zur Axe der  $x$  normalen Seitenflächen. Die Drucke, welche sich auf zwei einander gegenüberliegende Flächen beziehen, werden ohne merklichen Fehler als gleich und entgegengesetzt angesehen werden können, und man wird sich denken dürfen, dass jede dieser Kräfte in dem Durchschnittspunkte der Diagonalen des bezüglichlichen Rectangels angebracht ist. Durch den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt der drei Diagonalen des Parallelepiped und parallel zur Axe der  $z$  sei eine gerade Linie geführt und diese sei die Axe der Momente. Die einzigen Kräfte, deren Momente dann nicht gleich Null sind, werden die beiden Seitenkräfte  $P_1 l l''$  sein, welche parallel zur Axe der  $x$  auf die beiden Flächen wirken, die auf der Axe der  $y$  senkrecht stehen und die beiden Seitenkräfte  $Q_3 l l''$ , die parallel zur Axe der  $y$  auf die beiden Flächen wirken, welche auf der Axe der  $x$  senkrecht stehen. Die beiden ersten Kräfte werden das Bestreben haben, das Parallelepiped gemeinschaftlich nach einer bestimmten Richtung um die Momentenaxe zu drehen; und das Moment jeder einzelnen dem Product  $\frac{1}{2} l' \cdot P_2 l l''$ , die Summe von beiden mithin dem Product  $P_2 l l' l''$  gleich sein. Die Summe der beiden anderen Momente wird in gleicher Weise  $Q_3 l l' l''$  sein, diese aber werden das Parallelepiped in entgegengesetzter Richtung zu drehen das Bestreben haben. Für das Gleichgewicht muss daher sein

$$P_2 l l' l'' - Q_3 l l' l'' = 0 \quad \text{oder} \quad P_2 = Q_3.$$

Betrachtet man sodann die Momente, welche sich auf Axen beziehen, die denen der  $y$  und  $z$  parallel sind, so wird man in gleicher Art nachweisen können, dass



$$R_3 = P_1 \quad \text{und} \quad R_2 = Q_1$$

sein müsse. Die Seitenkräfte  $P_1$ ,  $Q_1$ , u. s. w. werden sich mithin auf nur sechs von einander verschiedene Kräfte reduciren, was eben erwiesen werden sollte.

Die Werthe von  $P_1$ ,  $P_2$ , u. s. w. in Nro. 22 thun dieser Bedingung nur Genüge, wenn man darin  $K=0$  macht, und diess rührt daher, dass angenommen worden ist, sie wirkten auf ein schiefwinkliges Parallelepiped; dagegen findet diess für die Werthe von  $P'_1$ ,  $P'_2$  u. s. w. der Nro. 23 für jedes beliebige  $K$  statt, weil diese sich auf ein rechtwinkliges Parallelepiped beziehen, wie es der vorstehende Beweis verlangt. In diesem Beweise ist auf die gegebenen Kräfte, welche auf die inneren Punkte des Parallelepipeds wirken, keine Rücksicht genommen worden, weil die Summe ihrer Momente, bezogen auf die jedesmalige in Betracht bezogene Axe, in Bezug auf  $l$ ,  $l'$ ,  $l''$  augenscheinlich eine Grösse der vierten Ordnung ist, und mithin im Verhältniss zu den Momenten - Summen der Drucke, welche nur von der dritten Ordnung sind, vernachlässigt werden darf. Aus demselben Grunde darf man auch die Drucke, welche auf die gegenüberstehenden Seiten des Parallelepipeds wirken, für gleich ansehen.

Da nun auf diese Weise die Seitenkräfte  $P_1$ ,  $Q_1$ , u. s. w. auf sechs verschiedene Kräfte reducirt sind, und da der Ausdruck für jede dieser Kräfte sechs besondere Coefficienten enthalten kann, so folgt daraus, dass die allgemeinen Gleichungen für das Gleichgewicht und mithin auch die für die Bewegung sechsunddreissig Coefficienten enthalten werden, welche man nicht auf eine geringere Anzahl bringen kann, ohne die Allgemeinheit der Frage zu beeinträchtigen. Wir unterlassen es, sie hinzuschreiben, theils wegen ihrer Verwicklung, theils wegen des seltenen Gebrauchs, den man davon würde machen können.

39. Ich werde diesen Theil der vorliegenden Abhandlung, welcher sich auf die festen Körper bezieht, mit einigen Bemerkungen beschliessen, welche eben so wohl für jene, wie für die Fluida gelten.

Wenn man bei der Berechnung der Molecularwirkungen die Körper als continuirliche Massen betrachtet und sie in Differenzial - Elemente zerlegt, so erscheinen die Ausdrücke für die Seitenkräfte, welche man aus der Zerlegung



des Drucks auf eine durch einen inneren Punkt  $M$  gelegte Ebene erhält, in der Form von sechsfachen Integralen, welche man auf dreifache Integrale zurückführen kann und es ist der Werth jeder Kraft dem Quadrat der Dichtigkeit proportional, weil jene aus der Wirkung entspringt, welche von allen Punkten eines Theils des Körpers auf alle Punkte eines angrenzenden Theils ausgeübt wird. Wenn der Punkt  $M$  in einer unmerklichen Entfernung von der Oberfläche liegt, so wird der Druck auf eine Ebene, welche auf der bezüglichen Normale senkrecht steht, dem äusseren Druck das Gleichgewicht halten, und wenn man letzteren mit  $\Pi$  bezeichnet, so wird man mithin

$$\Pi = \pi \rho^2$$

haben, wo  $\rho$  die Dichtigkeit im Punkte  $M$  und  $\pi$  einen Coefficienten bezeichnet, der von der Natur des Körpers und der Wärmemenge seiner Molecüle abhängig, dagegen von dem Grade der Zusammendrückung des Körpers unabhängig ist. Vermehren wir nun den Druck  $\Pi$ , so dass er  $\Pi + \Pi'$  wird, und denken wir uns, dass die Wärme verhindert sei, zu entweichen, oder aber, dass den Molecülen des Körpers diejenige Wärme sofort wieder ersetzt werde, welche etwa in Folge der Zusammendrückung entweicht, so wird die Dichtigkeit  $\rho$  sich ändern und etwa in  $\rho(1 + \delta)$  übergehen; dagegen wird der Coefficient  $\pi$  ungeändert bleiben, und es wird

$$\Pi + \Pi' = (1 + \delta)^2 \pi \rho^2$$

sein, woraus

$$\Pi' = (2\delta + \delta^2) \Pi$$

folgt. In den festen Körpern und in den tropfbaren Flüssigkeiten ist jedoch selbst für eine sehr grosse Vermehrung des äusseren Druckes die Contraction nur sehr klein und es ist mithin  $\delta$  eine sehr kleine Bruchzahl, wenn auch  $\Pi'$  ein sehr grosses Vielfaches von  $\Pi$  ist. Diess letztere macht aber die vorstehende Gleichung unmöglich. In den luftförmigen Fluiden sind die Aenderungen der Dichtigkeit beträchtlich, und es ist a priori nicht unmöglich, dass dort der Druck dem Quadrat der Dichtigkeit proportional sei, während die Wärmemenge ungeändert bleibt. Aber die Erfahrung zeigt, dass diess Verhältniss in der Natur nicht statt hat. Der Fall einer constanten Wärmemenge kommt



z. B. bei den abwechselnden Verdichtungen und Verdünnungen vor, welche die Bildung der Schallwellen begleiten und welche so schnell vor sich gehen, dass die Wärme der Luftmolecüle keine Zeit hat, zu entweichen. Nun weiss man aber, dass die Geschwindigkeit des beobachteten Tones zwar anzeigt, dass bei diesen Veränderungen in der Dichtigkeit die elastische Kraft der Luft, oder der Druck, welcher ihr als Maass dient, schneller wächst und abnimmt, als die erste Potenz der Dichtigkeit, aber man findet auch, dass diess dennoch in einem geringeren Verhältniss als dem der zweiten Potenz statt hat. Um es zu erklären, wie es kommen könne, dass in dem vorbezeichneten Phänomen die elastische Kraft in einem geringeren Verhältniss wechselt, als das Quadrat der Dichtigkeit, nimmt man gewöhnlich an, dass während der Dauer einer jeden Vibration der Luft ein Theil der Wärme ihrer Molecüle seine abstossende Kraft verliere und zu latenter Wärme werde, deren Menge man sodann aus der Geschwindigkeit des Tons bestimmt, um welche es sich jedesmal handelt. (Siehe *mécanique celeste*, tome V, page 121.) Aber die Voraussetzung, dass eine materielle Substanz je nach Maassgabe des (theoretischen) Bedürfnisses die gegenseitige Einwirkung ihrer Partikeln verliert oder wieder annimmt, ist zu vague, um auch noch ferner in der Theorie der Wärme zugelassen zu werden; und die vorangeführte Erklärungsweise ist ohne Zweifel nur daraus entstanden, dass man für den Fall, wo die Wärmemenge sich nicht ändert, das Gesetz eines dem Quadrat der Dichtigkeit proportionalen Drucks für ein nothwendiges ansah.

Wenn man nun die Molecular - Drucke mit Berücksichtigung der leeren Räume zwischen den Molecülen berechnet, so wird der Ausdruck, den man dafür erlangt, die Form einer Summe haben, welche sich nicht nothwendigerweise auf ein Integral reducirt. Setzt man voraus, dass die Räume zwischen den Molecülen im Vergleich zu dem Halbmesser ihrer Wirkungssphäre sehr klein seien, so wird man sich den Ausdruck für jene Summe immer auf eine sehr convergente Reihe zurückgeführt denken können, welche nach steigenden Potenzen des mittleren Molecular - Zwischenraums, oder was dasselbe ist, nach fallenden Potenzen der Cubikwurzel aus der Dichtigkeit geordnet ist, und deren erstes Glied den Druck bezeichnen wird, welcher in dem Falle statt haben würde, wenn continuirlicher Zusammenhang der Masse vorhanden wäre.



Wir haben soeben ein Beispiel einer solchen Reduction gegeben, und wenn wir die Form der Reihe (6) in Bezug auf den mittleren Molecularzwischenraum oder in Bezug auf die Dichtigkeit betrachten, so ist Grund vorhanden, anzunehmen, dass sie nicht bloss unter der besonderen Voraussetzung statt hat, welche wir dort in Betreff der inneren Beschaffenheit und Anordnung des Körpers gemacht haben, sondern dass diese Form des Ausdrucks für den Druck als Function der Dichtigkeit vielmehr allen möglichen Zusammenstellungen von Molecülen entspricht, bei welchen der Druck um jeden Punkt herum nach allen Richtungen hin gleich ist. In Folge der Factoren, von denen die Glieder der genannten Reihe abhängen, kann man auch annehmen, dass alle diese Glieder, vom dritten an gerechnet und im Vergleich zum zweiten unmerklich sind und vernachlässigt werden können. Der Werth dieses zweiten Gliedes im Vergleich zum ersten kann aber von der Art sein, das er nicht ausser Acht gelassen werden darf, und zwar, weil die Molecular-Wirkung aus zwei Kräften entspringt, welche nach entgegengesetzten Richtungen wirken, und weil diese Wirkung innerhalb des Bereiches ihrer merklichen Werthe das Vorzeichen wechselt. Die Beispiele, welche wir für einen analogen Fall in den Nro. 7 und 13 beigebracht haben, dürften diesen Punkt ausser Zweifel setzen. Bezeichnet nun  $p$  den nach allen Richtungen hin gleichen Druck, welcher der Dichtigkeit  $\rho$  entspricht, so werden wir daher für feste, nicht cristallisirte Körper, sowie für tropfbare Flüssigkeiten und für Gase annehmen, dass

$$p = a\rho^2 + b\rho^{\frac{2}{3}}$$

sei, wo  $a$  und  $b$  Coefficienten sind, welche nur von der Beschaffenheit des Körpers und von seiner Wärmemenge abhängen, dergestalt, dass wenn für einen und denselben Körper die Dichtigkeit und die Temperatur sich ändern, während die Wärmemenge dieselbe bleibt, auch diese Coefficienten sich nicht ändern, wogegen, wenn die Dichtigkeit unverändert bleibt, die Temperatur aber wechselt und umgekehrt,  $a$  und  $b$  constant bleiben oder auch nach einem noch näher zu ermittelnden Gesetz sich ändern können.

Da die festen Körper und die tropfbaren Flüssigkeiten ihren (Aggregat-) Zustand beibehalten können, ohne dazu eines Druckes von aussen zu bedürfen,



so muss in Bezug auf sie der Werth von  $p$  für einen angemessenen Werth von  $\rho$  der Null gleich sein können, und hierzu ist nothwendig, dass die Coefficienten  $a$  und  $b$  entgegengesetzte Vorzeichen haben. Bezeichnet man diesen Werth der Dichtigkeit mit  $\alpha$  und setzt voraus, dass für einen gegebenen Druck  $P$  der Werth von  $\rho$  durch  $\alpha(1 + \beta)$  dargestellt wird, wo  $\beta$  eine sehr kleine Bruchzahl ist, deren Quadrat vernachlässigt werden kann, so wird

$$a = \frac{3P}{4\alpha^2\beta}, \quad b = -\frac{3P}{4\alpha^{\frac{2}{3}}\beta}$$

sein, wo  $a$  positiv ist und die absoluten Zahlenwerthe der beiden Glieder des Ausdrucks für den Druck im Vergleich zu ihrer Differenz sehr gross sein werden.

Für Gase werden die Coefficienten  $a$  und  $b$  einerlei Vorzeichen haben können, und die Erfahrung zeigt, dass für die Luft bei gewöhnlicher Temperatur der Coefficient  $b$  positiv ist. Stellt man nemlich jenen Ausdruck für  $p$  mit den Gesetzen von *Mariotte* und *Gay-Lussac*, welche für zuverlässige Ergebnisse der Beobachtungen angesehen werden dürfen, zusammen, so findet man

$$\gamma = 2 - \frac{4b}{3k^{\frac{2}{3}}(1 + w\theta)^{\frac{2}{3}}p^{\frac{1}{3}}},$$

wo  $\gamma$  das Verhältniss der specifischen Wärme eines gegebenen Gewichts Luft unter constantem Drucke zu der specifischen Wärme unter constantem Volumen,  $\theta$  die Temperatur,  $w$  den Verdünnungs-Coefficienten der Gase, und  $k$  das Verhältniss des Drucks zu dem Druck bei derjenigen Dichtigkeit bezeichnet, welche in dem in Rede stehenden Fluidum dem Werthe  $\theta = 0$  entspricht. Es leuchtet ein, dass  $\gamma$  grösser sein muss als die Einheit, denn es ist ohne Zweifel eine grössere Wärmemenge nöthig, um die Temperatur der Luft zu erhöhen, während sie sich verdünnt, als wenn man dieselbe Wirkung bei unverändertem Volumen der Luft hervorbringen will. Die beobachtete Geschwindigkeit des Schalles, welche  $\sqrt{\gamma}$  zum Factor hat, beweiset, dass  $\gamma$  kleiner als 2 und ohngefähr gleich  $\frac{4}{3}$  sein müsse; es muss daher  $b$  positiv sein, wie wir es vorhin angedeutet haben. Für ein gegebenes Gewicht eines



und desselben Fluidums wird der Coefficient  $b$  einzig und allein von der Wärmemenge abhängen; sein Werth wird wechseln, wenn man successive den Druck  $p$  oder die Temperatur  $\theta$  sich ändern lässt; dagegen wird er constant bleiben, wenn  $p$  und  $\theta$  zusammen sich so ändern, dass die Wärmemenge dieselbe bleibt und es wird alsdann die Differenz  $2 - \gamma$  im umgekehrten Verhältniss, wie das Product  $p(1 + w\theta)^2$ , sich ändern.

Die Analogie veranlasst uns, die Formel (6) auf alle nicht cristallisirten Materien zu beziehen. Der Coefficient des zweiten Gliedes ist positiv oder negativ, jenachdem die Function  $fr$ , welche den Ueberschuss der Attraction über die Repulsion ausdrückt, für  $r = 0$  positiv oder negativ ist. Damit übrigens dieses zweite Glied einen im Verhältniss zum ersten Gliede beachtenswerthen Werth haben könne, so ist es nothwendig, dass die Function  $fr$  in dem Bereiche ihrer merklichen Werthe ihr Vorzeichen wechsle. Wenn daher die Repulsion anfangs die Attraction übertrifft, so muss jene schneller abnehmen als diese, und umgekehrt. In den festen und tropfbaren Körpern muss daher die gegenseitige Attraction der Molecüle sich weiter erstrecken als ihre Repulsion, und die erstere kann noch auf Entfernungen merklich sein, wo die letztere gänzlich verschwunden ist; für die atmosphärische Luft im Gegentheil, und wahrscheinlich auch für alle Gase, fordert die Theorie, dass die Attraction anfangs die Repulsion übertreffe, sodann aber schneller abnehme als diese und in einer Entfernung unmerklich werde, wo letztere sich noch thätig zeigt. In Bezug auf diesen Punkt ist die Ansicht zu berichtigen, welche ich am Ende der Nro. 16 meiner Abhandlung über das Gleichgewicht der Fluida ausgesprochen und in dem ferneren Verlauf jener Abhandlung beibehalten habe. Auch wird man sich daran erinnern müssen, dass wir unter der Attractivkraft zweier Molecülen nicht bloss die gegenseitige Wirkung ihrer wägbaren Materie verstehen, sondern dass wir dabei auch die Wirkung der Materie eines jeden auf den Wärmestoff des andern mit inbegriffen denken. (Siehe Nro. 2).



§. V.

*Berechnung der Drucke bei den im Gleichgewicht befindlichen Fluiden;  
Differenzial-Gleichungen für diess Gleichgewicht.*

40. Wenn durch irgend welche Kräfte, die im Innern oder auf die Oberfläche eines festen Körpers wirken, die Form des letzteren geändert und seine Molecüle aus ihren Stellen gerückt werden, so befinden sich alle die materiellen Punkte, welche ursprünglich auf einer und derselben geraden Linie von unmerklicher Länge lagen, nach der erfolgten Ortsveränderung wiederum auf einer geraden Linie (Nro. 18). Wenn  $M$  und  $M'$  die Schwerpunkte von zwei Molecülen sind, die ausserordentlich nahe bei einander liegen, so wird die gerade Linie  $MM'$  in den zwei aufeinanderfolgenden Zuständen des Körpers durch dieselbe Reihe von Molecülen hindurch gehen; mithin wird die Vermehrung oder Verminderung der Länge, welche sie im Vergleich zu ihrer ursprünglichen Länge erleidet, die lineare Ausdehnung oder Zusammenziehung des Körpers in der Richtung  $MM'$  kennen lehren. Im Allgemeinen kommt es vor, dass die positive oder negative Contraction nach den verschiedenen Richtungen um einen und denselben Punkt ihrerseits ebenfalls verschieden ist und es kann selbst nach der einen Seite Ausdehnung statt haben, während nach einer andern Richtung Contraction vorhanden ist. Zu gleicher Zeit wechselt der Druck auf eine durch den Punkt  $M$  gehende Ebene mit der Richtung der letzteren; in dem besonderen Falle jedoch, wenn die lineare Contraction in allen Richtungen dieselbe ist (Nro. 28), ist auch der Druck in allen Richtungen gleich und dabei normal gegen die Ebene, auf welche derselbe wirkt; und umgekehrt kann der Druck nicht normal und nach allen Richtungen um einen Punkt  $M$  herum derselbe sein, wenn nicht die lineare Zusammenziehung nach allen Richtungen um diesen Punkt herum dieselbe ist.

Anders verhält es sich mit den Fluiden. Wenn gegebene Kräfte auf die Molecüle eines homogenen oder heterogenen Fluidums wirken, oder wenn



an der Oberfläche desselben ein Druck thätig ist, so comprimirt oder verdünnt es sich gleichmässig nach allen Richtungen um jeden seiner Punkte. Eine gerade Linie  $MM'$ , so klein sie immer angenommen werden mag, welche irgend zwei Punkte des Fluidums verbindet, wird nach der Anbringung jener Kräfte nicht mehr durch dieselben Molecüle hindurchgehen, wie vorher. Ein Theil der Molecüle, welche sie zuerst berührte, bleibt auf dieser geraden Linie, ein anderer Theil entfernt sich nach verschiedenen Seiten und andere Molecüle treten an ihre Stelle. Daraus folgt dann, dass die Verlängerung oder die Verkürzung der geraden Linie  $MM'$  nicht im Stande ist, Aufschluss über die Verdünnung oder die Verdichtung des Fluidums nach der Richtung jener Linie zu gewähren, und es ist selbst möglich, dass die Form des Fluidums sich ändert, ohne dass in irgend einem Theile desselben Verdichtung oder Verdünnung stattfindet, ein Verhältniss, welches niemals bei festen Körpern eintritt. Wenn die Molecüle eines Fluidums eine Ortsverrückung erlitten haben, so findet sich letzteres hinterher um jeden Punkt  $M$  herum genau wieder so constituirt, wie diess vorher der Fall war, und man muss sich die in der Wirkungssphäre von  $M$  begriffenen Molecüle als ein System vorstellen, welches immer sich selbst ähnlich bleibt und nur nach einem grösseren oder kleineren Maassstabe construirt ist, wobei man jedoch dieses System in seinem mittleren Zustande zu betrachten und von den etwanigen Unregelmässigkeiten in der Vertheilung derjenigen Molecüle abzusehen hat, aus denen es zusammengesetzt ist. Obgleich nun, wie oben angedeutet, in dem Inneren jedes Fluidums um jeden Punkt  $M$  herum die Zusammenziehung oder Ausdehnung immer nach allen Richtungen hin gleich ist, so ändert sich dieselbe doch von einem Punkte zum andern, nach Gesetzen, welche von der Natur des Fluidums und von den auf seine Molecüle wirkenden Kräften abhängig sind, oder mit anderen Worten, der mittlere Zwischenraum der Molecüle, wie er im Anfange dieser Abhandlung in Nro. 1 definirt worden ist, ist eine Function der Coordinaten des entsprechenden Punktes  $M$ , welche von der Natur des Fluidums in seinem natürlichen Zustande abhängt, und sich nachher in eine andere Function verwandelt, deren Form aus der Natur des Fluidums und aus den wirksamen Kräften hervorgeht, welche in Functionen jener Coordinaten gegeben sind.



Aus der Eigenschaft der Fluiden, sich um jeden ihrer Punkte herum nach allen Richtungen hin gleichmässig zusammenzuziehen oder auszudehnen, folgt, dass auch der Druck auf jede beliebige durch einen innern Punkt gelegte Ebene gleich ist und normal gegen jede dieser Ebenen wirkt, wenigstens dann, wenn man die Veränderung in der Materie des Fluidums und in dem mittleren Molecular-Zwischenraum innerhalb des Bereiches der Molecularwirkungssphäre ausser Acht lässt. Jeder dieser beiden Umstände ist, wie schon gesagt, innig mit dem andern verbunden, und der zweite tritt nie ein, ohne dass gleichzeitig auch der erste statt hat. Da das Prinzip der Gleichheit des Drucks nach allen Richtungen, welches man gegenwärtig der Hydrostatik zum Grunde legt, als eine Sache der Erfahrung angesehen wird, so könnten wir die Eigenschaft der Fluiden, sich um jeden Punkt herum immer wieder ähnlich zu sich selbst zu constituiren, ebenfalls als etwas Gegebenes oder als eine nothwendige Folge der Erfahrung ansehen; allein es wird gut sein, sich von dieser Grundeigenschaft der Fluiden, welche sie wesentlich von den festen Körpern unterscheidet, a priori Rechenschaft zu geben.

41. Die in Rede stehende Eigenschaft kann der vollkommenen Beweglichkeit der Molecüle zugeschrieben werden, welche daraus entspringt, dass man sich letztere entweder sphärisch oder weit genug von einander entfernt denkt, so dass ihre Form nicht mehr einen merklichen Einfluss auf ihre gegenseitige Einwirkung, folglich auch nicht mehr auf ihre Anordnung in dem Bereiche der Molecular-Wirkungssphäre hat. Aus jener Hypothese geht dann begreiflicherwise hervor, dass wenn irgend ein Druck an der Oberfläche eines Fluidums angebracht wird, eine ungleichmässige Zusammenziehung nach den verschiedenen Richtungen nicht vorkommen kann, indem keine besondere Ursache vorhanden sein würde, welche die Molecüle in denjenigen Richtungen, wo sie etwa gedrängter stehen möchten, zurückhalten könnte, und dass, wenn ungleiche Zusammenziehungen statt fänden, diess nur ein Gleichgewichts-Zustand ohne Stabilität sein könnte; ein Zustand, den man als physisch unmöglich betrachten muss. Wenn dagegen das Fluidum zuvor in dem Zustande eines stabilen Gleichgewichtes sich befindet, und sodann neue Kräfte auf dasselbe einwirken, so wird der neue Gleichgewichts-Zustand, zu dem es gelangt, indem es jenen Kräften nachgiebt,



eben so stabil sein als der ursprüngliche Zustand, dafern die neue Anordnung der Molecüle um jeden Punkt herum demjenigen ähnlich ist, welcher vorher statt fand, wie diess in der vorigen Nummer auseinandergesetzt worden ist. Das soeben Gesagte gilt ebensowohl für das Innere des Fluidums, wie für die dünne Schicht desselben, welche dessen Oberfläche bildet, vorausgesetzt jedoch, dass diese Schicht nicht in Berührung mit einem festen Körper steht und an dessen Oberfläche anhängt. Betrachtet man also in dieser Schicht, deren Dicke dem Halbmesser der Molecular-Wirkungssphäre vergleichbar ist, und in welcher der Grad der Compression sehr schnell wechselt, auch von dem in merklicher Tiefe statt habenden verschieden ist, einen Punkt *M*, dessen Entfernung ein beliebig kleiner Theil der Totaldicke jener Schicht, dabei aber im Vergleich zu den Molecular-Zwischenräumen ausserordentlich gross ist, so wird die lineare Ausdehnung oder Zusammenziehung nach allen Richtungen hin um diesen Punkt *M* herum gleich sein, ebenso, wie um jeden andern Punkt, der im Innern des Fluidums liegt.

In den festen Körpern, cristallisirt oder nicht, kann die besondere Ursache, welche die Molecüle in denjenigen Richtungen festhält, wo sie mehr oder weniger gedrängt stehen, nur in demjenigen Theil der Wirkung dieser Molecüle liegen, welcher von der Form und der gegenseitigen Lage der letzteren abhängt. Bewirkt man durch eine Hinzufügung von Wärmestoff, dass die Molecüle sich mehr von einander entfernen, so nimmt diese secundäre Kraft im allgemeinen schneller ab, als der andere Theil der gegenseitigen Einwirkung; ihre Wirkung kann sogar ganz unmerklich werden, und dann geht der Körper in den flüssigen Zustand über. In den nicht elastischen Körpern ist es ohne Zweifel dieselbe secundäre Kraft, welche die Molecüle in denjenigen Lagen erhält, in die sie durch fremde Kräfte versetzt worden sind, und welche die bezüglichen Körper bestimmt, selbst dann noch in derjenigen Form zu verbleiben, in welche jene Kräfte sie gebracht haben, wenn diese bereits aufgehört haben zu wirken. Wie dem auch sei, so ist die in Rede stehende secundäre Kraft für die Stabilität des Gleichgewichts der Molecüle in den festen Körpern nothwendig, indessen hindert diess nicht, dass man sie, wie in Nro. 3, in dem Falle nicht cristallisirter Körper ausser Acht lassen darf, wenn es sich darum handelt, die gegenseitige Einwirkung zweier



Körpertheilchen zu berechnen, welche zwar unmerklich sind, dabei aber jedes eine ausserordentlich grosse Anzahl von Molecülen enthalten.

Wenn ein Fluidum mit einem festen Körper in Berührung ist, welcher im Stande ist, auf dessen Molecüle zu wirken, so wird diese Wirkung eine partikuläre Compression hervorbringen, welche sich allmählig bis zu einer zwar ausserordentlich kleinen aber doch merklichen Entfernung von der Oberfläche des festen Körpers übertragen kann, obgleich die unmittelbare Wirkung dieses Körpers an sich, sich nur auf eine unmerkliche Entfernung erstreckt. Es kann vorkommen, dass das Fluidum in der Dicke dieser so comprimierten Schicht seine Flüssigkeit verliert, oder mit andern Worten, es können die Molecüle des Fluidums möglicherweise dort weit genug einander genähert sein, so dass, wie in den festen Körpern, ihre Form auf ihre gegenseitige Wirkung Einfluss hat. Unter dieser Voraussetzung wird die lineare Zusammenziehung, und folglich auch der Molecular-Druck, nicht mehr nach allen Richtungen hin um jeden Punkt herum gleich sein; und diess ist es ohne Zweifel, was in einer ausserordentlich dünnen Schicht einer tropfbaren Flüssigkeit vor sich geht, mittelst deren ein fester Körper benetzt ist und welche aufhört, an dessen Oberfläche fortzufließen; eine deutliche Wirkung der scheinbaren Adhäsion, welche aus derselben Ursache entspringt, wie die Erscheinungen der Capillarität.

42. Wenn man die soeben bezeichneten wesentlichen Verschiedenheiten zwischen den festen und flüssigen Körpern beachtet, so wird man leicht begreifen, dass das Problem des Gleichgewichts nicht ein und dasselbe für beide Arten von Körpern ist. In dem Falle der festen Körper sind drei Unbekannte vorhanden, nemlich die Ortsverrückungen jedes inneren Punktes nach drei aufeinander rechtwinkligen Richtungen, welche wir im Vorigen durch  $u$ ,  $v$ ,  $w$  dargestellt haben. Mittelst dieser drei Unbekannten kann man den, allen inneren Punkten gemeinsamen, drei Gleichgewichts - Gleichungen Genüge leisten, welches immerhin die gegebenen wirksamen Kräfte sein mögen. Die Werthe von  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , in Functionen der ursprünglichen Coordinaten des bezüglichen Punktes  $M$ , lehren dann die spätere Lage dieses Punktes  $M$ , für sich betrachtet, kennen. In dem Falle der flüssigen Körper jedoch ist, wie man aus dem Vorhergehenden ersieht, kein Anlass vorhanden, den Ortswechsel jedes



einzelnen Molecüls für sich zu bestimmen; es ist nur ein einziger Unbekannter vorhanden, um den drei Gleichgewichts-Gleichungen, welche sich auf das Innere des Fluidums beziehen, Genüge zu leisten, nemlich der mittlere Molecularzwischenraum, und aus diesem Grunde wird das Gleichgewicht nur möglich sein, wenn die gegebenen Kräfte, in Functionen der Coordinaten eines beliebigen Punktes, von der Art sind, dass diese drei Gleichungen sich auf eine einzige reduciren. Hierdurch wird die Allgemeinheit jener Function beschränkt.

Auch das Problem der Bewegung ist in diesen beiden Fällen sehr verschieden. Wenn es sich um einen festen Körper handelt, so können die Differenzial-Gleichungen für die Bewegung seiner Molecüle mittelst des allgemeinen Prinzips der Dynamik unmittelbar aus denen für das Gleichgewicht abgeleitet werden. In Betreff der Fluiden muss man jedoch auf einen Umstand Rücksicht nehmen, welcher nur auf die Bewegung Einfluss haben kann, keineswegs jedoch auf das Gleichgewicht.

Wenn nemlich die Molecüle eines Fluidums ihren Ort verändern, so bedürfen sie einer gewissen Zeit, wie klein diese auch immerhin sein möge, um zu einer Anordnung um jeden Punkt herum zu gelangen, welche der ursprünglichen ähnlich ist, und bei welcher von Neuem nach allen Richtungen hin ein gleicher Druck ausgeübt wird. Während dieser sehr kurzen Zeit, welche nichtsdestoweniger für verschiedene Fluida auch sehr verschieden sein kann, ist der Druck nicht nothwendigerweise nach allen Richtungen hin gleich; indessen würde es unmöglich sein, sich hiervon im Zustande des Gleichgewichts zu überzeugen, da dieser immer erst eintritt, nachdem jener Zeitraum verflossen ist. Da aber in dem Falle der Bewegung die respective Stellung der Molecüle ohne Aufhören wechselt, so begreift man, dass die Betrachtung der in Rede stehenden Zeit eine Modification in dem Prinzip des gleichen Drucks nach allen Richtungen, sowie in der Form der daraus hergeleiteten Differenzialgleichungen, veranlassen kann. Wir werden diess weiter erörtern, wenn von der Bewegung der Fluida die Rede sein wird; inzwischen scheint es angemessen, bemerklich zu machen, dass man die Wirkung, welche wir jetzt nur andeuten, nicht mit der Viscosität der unvollkommenen Flüssigkeiten verwechseln muss. Die in Rede stehende Wirkung kann in



tropfbaren Flüssigkeiten ohne alle merkliche Viscosität und selbst in luftförmigen Fluiden statt haben, bei denen es vorzüglich dann nothwendig ist, darauf Rücksicht zu nehmen, wenn deren Schwingungen eine sehr grosse Schnelligkeit haben. Die Viscosität, wo sie sich zeigt, ist dasjenige, was die Flüssigkeiten hindert, vor Ablauf einer mehr oder minder kurzen Zeit, einen nach allen Richtungen hin gleichen Druck auszuüben. Man kann diess einem Einfluss der Form der Molecüle auf ihre gegenseitige Einwirkung zuschreiben und die viscosen Flüssigkeiten als eine Art von Zwischenstufe zwischen den festen Körpern und den vollkommenen Flüssigkeiten betrachten. Nur mit den letzteren werden wir uns im ferneren Verlauf dieser Abhandlung beschäftigen.

43. Bei der Berechnung des aus der Molecularwirkung in einem festen Körper entspringenden Drucks haben wir weder auf diejenigen Veränderungen Rücksicht genommen, welche in der Materie des Körpers, noch auf diejenigen, welche bei dem mittleren Molecular-Zwischenraum in dem Bereiche der Wirkungssphäre statt haben können; jetzt hingegen werden wir auch hierauf Bedacht nehmen, weil diejenigen Glieder des Ausdrucks für jenen Druck, welche daraus entspringen, bei den Flüssigkeiten nicht unmerklich sind. Diese Glieder sind in Bezug auf ihre Grösse von derselben Ordnung, wie der Theil des Drucks, welcher von der Krümmung derjenigen Fläche herrührt, die den beiden angrenzenden Theilen des Fluidums, um deren gegenseitige Wirkung es sich handelt, gemeinsam ist. Diese Fläche haben wir bei den festen Körpern als eben vorausgesetzt, werden ihr aber nunmehr jede beliebige Form geben.

Sei also  $M$  ein Punkt des Fluidums, welcher in merklicher Entfernung von dessen Oberfläche liegt. Nachdem das Gleichgewicht hergestellt ist, so seien  $x, y, z$  die drei rechtwinkligen Coordinaten von  $M$ . Ferner seien  $\mu$  und  $\mu'$  zwei andere Punkte im Bereich der Wirkungssphäre von  $M$ , und  $x + u, y + v, z + w$  die Coordinaten für den ersten dieser Punkte, sowie  $x + u', y + v', z + w'$  für den zweiten, und  $r$  die Entfernung  $\mu\mu'$ . Die gegenseitige Wirkung der Molecüle, welche den Punkten  $\mu$  und  $\mu'$  entsprechen, wird sich dann durch

$$F(r, x + u, y + v, z + w, x + u', y + v', z + w')$$



ausdrücken lassen, wo  $F$  eine Function anzeigt, welche nur für unmerkliche Werthe von  $r$  ihrerseits merkliche Werthe hat, und welche in Bezug auf  $x + u$  und  $x + u'$ , ferner auf  $y + v$  und  $y + v'$ , sowie endlich in Bezug auf  $z + w$  und  $z + w'$  symmetrisch ist. Da die Materie des Fluidums vorausgesetztermaassen sich nur in unmerklichen Gradationen ändert, und die Veränderlichen  $u, u'$  u. s. w. ausserordentlich klein sind, so wird man diese Function in einer convergenten Reihe entwickeln können, welche nach den Potenzen und Producten dieser sechs Grössen geordnet ist. Wenn man sodann nur die Glieder der ersten Ordnung davon beibehält und die Symmetrie der in Rede stehenden Function beachtet, so wird man

$$F + \frac{1}{2} \frac{dF}{dx} (u + u') + \frac{1}{2} \frac{dF}{dy} (v + v') + \frac{1}{2} \frac{dF}{dz} (w + w')$$

haben, wo der Abkürzung wegen  $F$  für

$$F(r, x, y, z, x, y, z)$$

gesetzt ist.

Betrachten wir nun zwei Theilchen des Fluidums, welche zwar unmerklich klein sind, von denen jedes jedoch eine ausserordentlich grosse Anzahl von Molecülen in sich begreift. Um bei der Berechnung der gegenseitigen Wirkung dieser beiden Theile die Veränderung des mittleren Molecular-Zwischenraums zu berücksichtigen, wird man die Function  $F$ , welche die bezügliche Wirkung zwischen zweien ihrer Punkte  $\mu$  und  $\mu'$  ausdrückt, durch eine andere Function  $f$  ersetzen können, welche  $r$ , die Coordinaten von  $\mu$  und  $\mu'$ , die mittleren Grössen der diesen Punkten entsprechenden Molecular-Zwischenräume und, wenn es nöthig ist, die betreffenden Partial-Differenzial-Quotienten enthält. Da nun ferner jene mittleren Grössen ebenfalls Functionen der Coordinaten von  $\mu$  und  $\mu'$  sind, so folgt, dass  $f$  sich auf eine Function derselben Veränderlichen reduciren wird, welche in  $F$  eingehen. Diese Function  $f$  wird übrigens ebenso, wie  $F$ , in Bezug auf die Coordinaten von  $\mu$  und  $\mu'$  symmetrisch sein, und, ebenfalls wie  $F$ , nur für unmerkliche Werthe der Entfernung  $r$  ihrerseits merkliche Werthe haben. Bei der in Rede stehenden Rechnung werden wir also den mittleren Molecular-Zwischenraum als constant und demjenigen gleich betrachten,



welcher in einem beliebig gewählten homogenen Fluidum statt hat. Wir werden denselben mit  $\varepsilon$  bezeichnen. Wenn sodann  $R$  eine passende Function von  $r, x, y, z$  bedeutet, welche für jeden merklichen Werth von  $r$  unmerklich ist, so werden wir die gegenseitige Wirkung von  $\mu$  und  $\mu'$  allgemein durch die Formel

$$R + \frac{1}{2} \frac{dR}{dx} (u + u') + \frac{1}{2} \frac{dR}{dy} (v + v') + \frac{1}{2} \frac{dR}{dz} (w + w') \quad (1)$$

ausdrücken. Wir werden dabei, wie immer, voraussetzen, dass die Richtung dieser Kraft in die gerade Verbindungslinie der beiden Punkte  $\mu$  und  $\mu'$  fällt, und werden die Kraft selbst als positiv oder negativ betrachten, jenachdem sie das Bestreben hat, diese Punkte von einander zu entfernen oder sie einander näher zu bringen.

Mittelst dieses Prinzips wird die Berechnung der Molecular-Drucke in den Fluiden ebenso einfach, als wenn diese Kräfte von Differenzial-Elementen herrührten und, wie in dem Falle einer continuirlichen Masse, sich durch bestimmte Integrale ausdrücken liessen. Die Substitution der Function  $f$  an die Stelle von  $F$  ist demjenigen ähnlich, was in diesem letzteren Falle immer geschehen ist, indem die Function, welche die Wirkung eines materiellen Punktes ausdrückt, durch das Product dieser Function in dasjenige ersetzt wird, was man die Dichtigkeit der continuirlichen Masse für diesen Punkt nennt.

44. Durch den Punkt  $M$  werde nun eine (beliebig gekrümmte) Fläche gelegt, welche das Fluidum in zwei Theile theilt, die  $A$  und  $A'$  heissen mögen. In der Nähe des Punktes  $M$  zerlege man sodann diese Fläche in lauter gleiche Theile von unmerklicher Grösse und zwar mittelst zweier Systeme von Krümmungslinien, welche sehr nahe bei einander liegen. In allen Punkten dieser Linien errichte man Normalen, welche bekanntlich abwickelbare Flächen bilden werden, durch welche sodann die Theile  $A$  und  $A'$  des Fluidums in Fäden zerlegt sind, welche senkrecht auf ihrer Trennungsfläche stehen. Bezeichne  $w$  den Flächenraum jedes Theilchens der letzteren oder die Grundfläche jedes der Fäden von  $A$  und  $A'$ , und nehmen wir an, dass die Abmessungen von  $w$  zu gleicher Zeit unmerklich



im Vergleich zum Halbmesser der Molecular-Wirkungssphäre, dagegen ausserordentlich gross im Verhältniss zu dem mittleren Molecularzwischenraum seien. Bedeute  $B$  denjenigen Faden von  $A$ , welcher dem Punkte  $M$  entspricht, und stellen wir uns nun die Aufgabe, die Wirkung zu bestimmen, welche von allen Fäden in  $A'$  auf  $B$  ausgeübt wird, indem wir dabei alle die materiellen Punkte, welche der Trennungsfläche von  $A$  und  $A'$  angehören, mit zu  $A'$  rechnen. Das Verhältniss dieser Kraft zur Grundfläche  $w$  von  $B$  wird dann der auf die Einheit der Fläche bezogene Druck im Punkte  $M$  sein, welcher aus der Wirkung des einen Theils  $A'$  des Fluidums auf den ihm angrenzenden Theil  $A$  herrührt.

Sei  $M'$  ein anderer Punkt der Trennungsfläche von  $A$  und  $A'$  im Bereich der Wirkungssphäre von  $M$ , und  $B'$  der Faden von  $A'$ , welcher dem Punkte  $M'$  entspricht. Seien  $m$  und  $m'$  zwei Punkte, welche beziehlich zu  $B$  und  $B'$  gehören und man bezeichne mit  $s$  und  $s'$  die Längen der Perpendikel, welche aus den Punkten  $m$  und  $m'$  auf die Trennungsfläche gefällt werden können, und welche natürlich auf den beiden verschiedenen Seiten der letzteren liegen. Sodann wird der Flächeninhalt eines Schnittes von  $B$ , welcher senkrecht auf dessen Richtung durch den Punkt  $m$  geführt wird, durch  $w(1 + hs)$  dargestellt werden können, wenn man das Quadrat von  $s$  ausser Acht lässt und wenn  $h$  einen positiven oder negativen Coefficienten bezeichnet, welcher nur von der Krümmung der Fläche im Punkte  $M$  abhängt. Vernachlässigt man in gleicher Weise das Quadrat von  $s'$ , sowie das Product aus  $s'$  und der Entfernung  $MM'$ , so wird in gleicher Weise der Flächenraum des durch den Punkt  $m'$ , senkrecht auf  $B'$  geführten Schnittes, durch  $w(1 - hs')$  dargestellt sein. Der eine der beiden Fäden  $B$  und  $B'$  wird also an Stärke zunehmen, während der andere in demselben Verhältniss abnimmt, und daraus folgt dann, dass bei dem Grade von Annäherung, bei welchem wir stehen bleiben, die gegenseitige Wirkung von  $B$  und  $B'$  von dem Coefficienten  $h$  unabhängig und dieselbe sein wird, als wenn die Querschnitte der beiden Fäden constant und beide gleich  $w$  wären. Bei der Berechnung des Moleculardrucks wird man also alle Fäden des Fluidums als prismatisch betrachten können, dagegen wird man auf die Neigungen der Fäden von  $A'$  gegen  $B$  Rücksicht zu nehmen haben.



Um die Rechnung zu vereinfachen, werde ich die Ebene der  $x, y$  parallel zu der Ebene legen, welche die Trennungsfläche im Punkte  $M$  berührt, auch werde ich der grössern Anschaulichkeit wegen annehmen, dass die Ebene der  $x, y$  horizontal und die positive Seite der Axe der  $z$ , sowie der Theil  $A$  des Fluidums oberhalb dieser Ebene, der Theil  $A'$  aber unterhalb liege.

45. Ich lege durch den Punkt  $M$  drei Axen parallel zu denen der  $x, y, z$  und bezeichne die zwei horizontalen Coordinaten von  $M'$ , bezogen auf die neuen Axen, mit  $\eta$  und  $\eta'$ , die verticale Coordinate aber mit  $\zeta$ . Der Veränderliche  $\zeta$  wird positiv oder negativ sein, jenachdem der Punkt  $M'$  über oder unter der Tangentialebene von  $M$  liegt. Sein Werth in Function von  $\eta$  und  $\eta'$  wird durch die Gleichung der Trennungsfläche gegeben sein, und wenn man annimmt, dass letztere in der Nähe des Punktes  $M$  keine scharfe Kante enthält, so wird die in Rede stehende Function in einer sehr convergenten Reihe entwickelt werden können, welche nach Potenzen und Producten von  $\eta$  und  $\eta'$  geordnet ist. Lässt man sodann die Glieder der dritten Ordnung ausser Acht und berücksichtigt, dass  $\zeta, \frac{d\zeta}{d\eta}, \frac{d\zeta}{d\eta'}$ , mit  $\eta$  und  $\eta'$  zugleich verschwinden, so hat man

$$\zeta = E\eta^2 + E'\eta'^2 + E''\eta\eta', \quad (2)$$

unter  $E, E', E''$ , Coefficienten verstanden, welche von der Richtung der Axen der  $\eta$  und  $\eta'$  in der Berührungsebene von  $M$  und von der Krümmung der Trennungsfläche in diesem Punkte abhängig sind.

Ist  $M'$  der Punkt, in welchem der von dem Punkte  $m'$  auf die Trennungsfläche gefällte Perpendikel  $s'$  die genannte Fläche trifft, so werden

$$\eta + s' \frac{d\zeta}{d\eta}, \quad \eta' + s' \frac{d\zeta}{d\eta'}, \quad \zeta - s'$$

die Coordinaten von  $m'$  sein, wenn man die Grössen der dritten Ordnung in Bezug auf  $\eta, \eta', s'$  ausser Acht lässt. Sind ferner  $u$  und  $v$  in gleicher Weise die Coordinaten des Punktes, in welchem der von dem Punkte  $m$  auf die Trennungsfläche gefällte Perpendikel  $s$  die genannte Fläche trifft, und bezeichnet man seine verticale Ordinate mit  $w$ , so wird man die



Coordinaten von  $m$  aus denen von  $m'$  ableiten können, wenn man darin  $u$ ,  $v$ ,  $w$  und  $-s$  an die Stelle von  $\eta$ ,  $\eta'$ ,  $\zeta$  und  $s'$  setzt, und der Werth von  $w$  wird der von  $\zeta$  sein, in welchem man  $u$  und  $v$  an die Stelle von  $\eta$  und  $\eta'$  setzen wird. Bezeichnet man nun die Winkel, welche die gerade Linie  $mm'$  mit drei anderen geraden Linien einschliesst, die parallel zu den Axen der  $x$ ,  $y$ ,  $z$  durch den Punkt  $M$  gelegt werden, mit  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  und bezeichnet  $r'$  die Länge der geraden Linie  $mm'$ , so hat man

$$\cos\alpha = \left( \eta - u + s' \frac{d\zeta}{d\eta} + s \frac{dw}{du} \right) \frac{1}{r'},$$

$$\cos\beta = \left( \eta' - v + s' \frac{d\zeta}{d\eta'} + s \frac{dw}{dv} \right) \frac{1}{r'},$$

$$\cos\gamma = (\zeta - w - s' - s) \frac{1}{r'},$$

$$\begin{aligned} r'^2 &= (\eta - u)^2 + (\eta' - v)^2 + (s + s')^2 - 2(\zeta - w)(s + s') \\ &\quad + 2 \left[ (\eta - u) \frac{d\zeta}{d\eta} + (\eta' - v) \frac{d\zeta}{d\eta'} \right] s, \\ &\quad + 2 \left[ (\eta - u) \frac{dw}{du} + (\eta' - v) \frac{dw}{dv} \right] s', \end{aligned}$$

wobei in der letzten Gleichung die Glieder von der vierten Ordnung ausser Acht gelassen sind. Ueberdiess hat man identisch

$$2\zeta = \eta \frac{d\zeta}{d\eta} + \eta' \frac{d\zeta}{d\eta'}, \quad 2w = u \frac{dw}{du} + v \frac{dw}{dv}.$$

Setzt man daher

$$\begin{aligned} r^2 &= (\eta - u)^2 + (\eta' - v)^2 + (s + s')^2, \\ \sigma &= (s' - s)(\zeta - w) + \left( \eta \frac{dw}{du} + \eta' \frac{dw}{dv} \right) s' - \left( u \frac{d\zeta}{d\eta} + v \frac{d\zeta}{d\eta'} \right) s, \end{aligned}$$

so ist

$$r'^2 = r^2 + 2\sigma, \quad r' = r + \frac{\sigma}{r},$$



und mithin

$$\cos \alpha = \frac{\eta - u}{r} + \left( s' \frac{d\zeta}{d\eta} + s \frac{dw}{du} \right) \frac{1}{r},$$

$$\cos \beta = \frac{\eta' - v}{r} + \left( s' \frac{d\zeta}{d\eta'} + s \frac{dw}{dv} \right) \frac{1}{r},$$

$$\cos \gamma = - \frac{(s + s')}{r} + \frac{\zeta - w}{r},$$

wo, nach Analogie mit dem Früheren, alle die Glieder ausser Acht gelassen sind, welche im Vergleich zu  $u, v, \eta, \eta', s, s'$  von der zweiten Ordnung sind.

Sei  $R'$  das, was aus  $R$  wird, wenn man darin  $r'$  an die Stelle von  $r$  setzt, dann hat man

$$R' = R + \frac{\sigma}{r} \frac{dR}{dr},$$

und die Formel (1), angewendet auf die Punkte  $m$  und  $m'$ , wird  $R + R'$ , wenn man

$$\frac{\sigma}{r} \frac{dR}{dr} + \frac{u + \eta}{2} \frac{dR}{dx} + \frac{v + \eta'}{2} \frac{dR}{dy} + \frac{s - s'}{2} \frac{dR}{dz} = R,$$

setzt und, wie vorher, die Glieder der zweiten Ordnung vernachlässigt. Multiplicirt man nach und nach mit  $-\cos \alpha, -\cos \beta, -\cos \gamma$ , so ergeben sich die Werthe für die Seitenkräfte, welche aus der Zerlegung, heziehlich nach den Axen der  $x, y, z$ , derjenigen Wirkung entstehen, die von dem in  $m'$  befindlichen Molecül auf das in  $m$  vorhandene ausgeübt wird. Bezeichnet man diese Seitenkräfte beziehlich mit  $Q, Q', Q''$ , so sind ihre angenäherten Werthe

$$Q = \frac{u - \eta}{r} R - \left( s' \frac{d\zeta}{d\eta} + s \frac{dw}{du} \right) \frac{R}{r} + \frac{u - \eta}{r} R,$$

$$Q' = \frac{v - \eta'}{r} R - \left( s' \frac{d\zeta}{d\eta'} + s \frac{dw}{dv} \right) \frac{R}{r} + \frac{v - \eta'}{r} R,$$

$$Q'' = \frac{s + s'}{r} R + \frac{w - \zeta}{r} R + \frac{s + s'}{r} R.$$



Sie werden die Coordinaten des Punktes  $m$  zu vergrössern oder zu vermindern streben, je nachdem sie positiv oder negativ sind.

46. Wenn wir nunmehr mit  $wT$  und  $wT'$  die horizontalen und den Axen der  $x, y$  parallelen Seitenkräfte bezeichnen, welche aus der Zerlegung der von  $A'$  ausgeübten Totalwirkung auf den Faden  $B$  entstehen, so wie mit  $wN$  die verticale, von unten nach oben gerichtete Seitenkraft derselben Wirkung, so haben wir

$$wT = \Sigma Q, \quad wT' = \Sigma Q', \quad wN = \Sigma Q'', \quad (3)$$

wo die Summenzeichen  $\Sigma$  auf alle Molecüle von  $A'$  und von  $B$  zu erstrecken sind. Dem zufolge, was früher in Nro. 44 gesagt worden ist, werden sowohl der Faden  $B$  als auch alle Fäden von  $A'$  als prismatisch betrachtet; gegenwärtig wird man sie aber auch alle als vertical voraussetzen und  $\eta, \eta'$  als die Coordinaten irgend eines Punktes  $m'$  von  $A'$ , so wie  $u, v, s$  als die Coordinaten des Punktes  $m$  von  $B$  ansehen können. Die vier Variablen  $\eta, \eta', u, v$  können positiv, negativ oder Null werden,  $s$  und  $s'$  sind beide positiv, aber  $s'$  allein kann Null werden, weil die materiellen Punkte der Trennungsfläche von  $A$  und  $A'$  zu  $A'$  gehören.

Bei diesen Summationen kann um den Faden  $B$  herum alles als ähnlich betrachtet werden, und es verschwinden deshalb die Glieder, welche eine ungerade Potenz von  $\eta$  oder von  $\eta'$  zum Factor haben. Man kann auch den Punkt  $M$ , welcher der Anfangspunkt der Coordinaten  $u$  und  $v$  ist und zur Grundfläche von  $B$  gehört, so wählen, dass die Glieder, welche eine ungerade Potenz von  $u$  oder  $v$  zum Factor haben, ebenfalls verschwinden. Wenn man sodann alle die genannten Glieder unterdrückt und die Gleichung (2) berücksichtigt, so werden sich die Werthe  $Q, Q', Q''$  reduciren auf

$$Q = \frac{u^2 - \eta^2}{2r} \frac{dR}{dx},$$

$$Q' = \frac{v^2 - \eta'^2}{2r} \frac{dR}{dy},$$

$$Q'' = \frac{s + s'}{r} R + \frac{u^2 - \eta^2}{r} ER + \frac{v^2 - \eta'^2}{r} ER + \frac{(w - \zeta)(s^2 - s'^2)}{r^2} \frac{dR}{dr}.$$



Wegen der Natur der Function  $R$  ist das Product  $r \frac{dR}{dr}$  eine Ordnung derselben Grösse wie  $R$ , folglich ist auch das letzte Glied von  $Q''$  eine Grösse derselben Ordnung, wie jedes der Glieder, welche ihm vorangehen. Nun ist aber alles, was über der durch den Punkt  $M$  gehenden Ebene der horizontalen Coordinaten liegt, ähnlich dem, was darunter liegt, oder es kann wenigstens so betrachtet werden, man hat daher

$$\sum \frac{(w - \zeta)s^2}{r^2} \frac{dR}{dr} = \sum \frac{(w - \zeta)s'^2}{r^2} \frac{dR}{dr},$$

weil alle Glieder der zweiten Summe, welche sich auf die genannte Ebene beziehen, wegen  $s' = 0$  verschwinden. Man kann daher das letzte Glied von  $Q''$  in den Summenausdrücken  $\sum Q''$  ausser Acht lassen. Setzt man sodann

$$\eta - u = x', \quad \eta' - v = y', \quad s + s' = z',$$

so werden die Gleichungen (3)

$$wT = -\frac{1}{2} \sum \frac{x'^2}{r} \frac{dR}{dx} + \sum \frac{x'u}{r} \frac{dR}{dx},$$

$$wT' = -\frac{1}{2} \sum \frac{y'^2}{r} \frac{dR}{dy} + \sum \frac{y'v}{r} \frac{dR}{dy},$$

$$wN = \sum \frac{z'}{r} R - E \sum \frac{x'^2}{r} R - E' \sum \frac{y'^2}{r} R - 2E \sum \frac{x'u}{r} R - 2E' \sum \frac{y'v}{r} R,$$

und zu gleicher Zeit wird man

$$r^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

haben.

Ich lege nun den  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  bestimmte Werthe bei und erstrecke die Summen  $\sum$  auf alle Werthe von  $u$  und von  $v$  und auf alle diejenigen von  $s$ , welche  $z'$  nicht überschreiten. In diesen partiellen Summationen werden die Grössen  $r$  und  $R$  constant sein; die Glieder, welche  $u$  oder  $v$  zum Factor haben, werden sich gegenseitig aufheben; und man wird die andern Glieder mit der Anzahl derjenigen Molecüle zu multipliciren haben, welche in einem Prisma von



der Grundfläche  $w$  und der Höhe  $z'$  enthalten sind, dabei aber nicht zur Grundfläche gehören. Diese Anzahl kann aber wegen der Ausdehnung, welche man für die Grundfläche  $w$  vorausgesetzt hat, als dem Ausdruck  $\frac{wz'}{\varepsilon^3}$  proportional angesehen werden, da vorausgesetztermaassen  $\varepsilon$  der mittlere Molecularzwischenraum ist, und dieser nach Nro. 43 zu benutzen ist. Unterdrücken wir daher den gemeinschaftlichen Factor  $w$ , so haben wir

$$T = -\frac{1}{2\varepsilon^3} \sum \frac{x'^2 z'}{r} \frac{dR}{dx},$$

$$T' = -\frac{1}{2\varepsilon^3} \sum \frac{y'^2 z'}{r} \frac{dR}{dy},$$

$$N = \frac{1}{\varepsilon^3} \sum \frac{z'^2}{r} R - \frac{1}{\varepsilon^3} E \sum \frac{x'^2 z'}{r} R - \frac{1}{\varepsilon^3} E' \sum \frac{y'^2 z'}{r} R.$$

Die Summenzeichen  $\Sigma$  sind über alle positiven und negativen Werthe von  $x'$  und  $y'$ , dagegen bloss über die positiven Werthe von  $z'$  zu erstrecken; unter letzteren kann der von  $z' = 0$  mit inbegriffen gedacht werden, weil diejenigen Glieder, welche sich auf diesen besonderen Werth von  $z'$  beziehen, gleich Null sind. Man kann auch die Summe  $\sum \frac{z'^2}{r} R$  über alle positiven und negativen Werthe von  $z'$  erstrecken, wenn man zuletzt nur die Hälfte des Resultats nimmt, welches nach Nr. 17 dann  $\frac{1}{6} \sum r R$  ist. Die Summen  $\sum \frac{x'^2 z'}{r} R$  und  $\sum \frac{y'^2 z'}{r} R$  sind beide dem Werthe  $\frac{1}{2} \sum \frac{r'^2 z'}{r} R$  gleich, wenn man mit  $r$ , die Horizontalprojection des Radius Vector  $r$  bezeichnet, so dass man  $r = \sqrt{x'^2 + y'^2}$  hat. Der Werth von  $N$  wird dann, insofern der Abkürzung wegen

$$p = \frac{1}{6\varepsilon^3} \sum r R, \quad q = -\frac{1}{4\varepsilon^3} \sum \frac{r'^2 z'}{r} R \quad (4)$$

gesetzt wird,

$$N = p + 2(E + E')q.$$



Das Summenzeichen in  $p$  muss über alle materiellen Punkte im Bereich der Wirkungssphäre von  $M$ , und das Summenzeichen in  $q$  auf alle diejenigen Punkte erstreckt werden, welche auf einer und derselben Seite der durch  $M$  geführten Horizontalebene liegen. Bei diesen Summationen ist der mittlere Molecularzwischenraum als constant und als dem  $\varepsilon$  gleich zu betrachten.

Diese Kraft  $N$  ist nun der normale Druck, welcher in dem Punkte  $M$  auf den Theil  $A$  des Fluidums ausgeübt wird; als positiv betrachtet, wenn er von innen nach aussen wirkt, und bezogen auf die Einheit der Fläche. Bedeuten  $\lambda$  und  $\lambda'$  die beiden Haupt-Krümmungshalbmesser der Oberfläche von  $A$  im Punkte  $M$ , so hat man, der Gleichung (2) zufolge

$$2(E + E') = \frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{d^2 z}{dy^2} = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'},$$

und mithin

$$N = p + q \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} \right). \quad (5)$$

Jeder dieser beiden Krümmungshalbmesser ist als positiv oder als negativ zu betrachten, jenachdem die correspondirende Krümmungslinie ihre erhabene oder ihre hohle Seite von  $A$  aus nach aussen weist.

Was die tangentiellen Drucke  $T$  und  $T'$  betrifft, so werden sie, wenn man die Ordnung der durch  $d$  und  $\Sigma$  angedeuteten Operationen in ihren oben angeführten Werthen umkehrt,

$$T = \frac{dq}{dx}, \quad T' = \frac{dq}{dy}. \quad (6)$$

Da der Molecularzwischenraum  $\varepsilon$  willkürlich gewählt worden ist, so können wir Behufs näherer Feststellung der Ideen annehmen, dass dieser mittlere Zwischenraum derjenige sei, welcher im Punkte  $M$  statt findet, und wir können dann für jeden Punkt  $M$  in Folge dieses Werthes von  $\varepsilon$ , die Grösse  $R$  als hinreichend bestimmt ansehen. Da diese Function  $R$  uns unbekannt ist, so werden die Bedingungen des Gleichgewichts oder die Erfahrung allein im Stande sein, Aufklärung über die Ziffernwerthe von  $p$  und  $q$  zu gewähren. Dieselben werden im Allgemeinen von der Natur des Fluidums, seiner Tem-



peratur und dem Grade seiner Zusammendrückung abhängig sein, und es ist selbst möglich, dass sie für nur sehr kleine Veränderungen von  $\varepsilon$  dennoch ihrerseits in sehr grossem Verhältniss sich ändern. Letzteres findet in Bezug auf  $p$  bei den incompressiblen Flüssigkeiten wirklich statt.

Noch ist zu beachten, dass die Momente der Totalwirkung von  $A'$  auf den Faden  $B$  gleich Null sind, wenn man sie auf eine Verticalaxe und auf Horizontalaxen bezieht, welche durch den Punkt  $M$  gehen. Bleibt man nemlich bei demselben Grade der Annäherung stehen, wie in der vorigen Rechnung, und behält man dieselben Bezeichnungen bei, so werden diese Momente durch nachstehende Summen dargestellt:

$$\sum \frac{u(\eta' - v) - v(\eta - u)}{r} R,$$

$$\sum \frac{u(s + s') - s(\eta - u)}{r} R,$$

$$\sum \frac{v(s + s') - s(\eta' - v)}{r} R,$$

und diese sind sämmtlich Null, weil jedes ihrer Glieder die erste Potenz von  $u$ , von  $v$ , von  $\eta$ , oder von  $\eta'$  zum Factor hat.

47. Die im Vorstehenden gefundenen Ausdrücke für die Kräfte  $T$ ,  $T'$  und  $N$  in Bezug auf den Punkt  $M$  setzen eine besondere Richtung der Coordinaten dieses Punktes voraus; wir wollen dieselben nunmehr in andere umwandeln, welche ganz beliebigen Coordinaten entsprechen.

Wenn man fortfährt, diese Coordinaten mit  $x$ ,  $y$ ,  $z$  zu bezeichnen, und  $z$  als eine Function von  $x$  und  $y$  zu betrachten, welche durch die Gleichung der Fläche von  $A$  gegeben ist, so hat man nach bekannten Formeln

$$\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} = \frac{d \left( \frac{1}{v} \frac{dz}{dx} \right)}{dx} + \frac{d \left( \frac{1}{v} \frac{dz}{dy} \right)}{dy},$$

wo der Abkürzung wegen



$$v = \sqrt{1 + \frac{dz^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dy^2}}$$

gesetzt worden ist. Das Vorzeichen dieses Wurzelausdrucks ist zweideutig; den Voraussetzungen zufolge indessen, welche man in der vorigen Nummer in Betreff der Vorzeichen von  $\lambda$  und  $\lambda'$  gemacht hat, muss man  $v$  als positiv oder als negativ ansehen, jenachdem derjenige Winkel spitz oder stumpf ist, den eine durch den Punkt  $M$  in der Richtung der positiven  $z$  und parallel zur Axe der  $z$  gelegte gerade Linie mit einer andern geraden Linie einschliesst, welche im Innern des Theiles  $A$  des Fluidums normal auf dessen Oberfläche durch denselben Punkt  $M$  gelegt ist.

Nennt man sodann den Theil des Normaldrucks  $N$ , welcher von der Form von  $A$  abhängt,  $V$ , so ist

$$V = q \left[ \frac{d \left( \frac{1}{v} \frac{dz}{dx} \right)}{dx} + \frac{d \left( \frac{1}{v} \frac{dz}{dy} \right)}{dy} \right]. \quad (7)$$

Bezeichnen wir nun, wie früher, mit  $\eta$ ,  $\eta'$ ,  $\zeta$  die Coordinaten eines Punktes  $M'$  der Oberfläche von  $A$ , bezogen auf den Punkt  $M$  als Anfangspunkt und auf die Richtungen der Kräfte  $T$ ,  $T'$ ,  $N$ , und nennen wir das, was aus  $q$  in dem Punkte  $M'$  wird,  $q'$ , so leuchtet ein, dass die Gleichungen (6) dasselbe sind, wie

$$T = \frac{dq'}{d\eta}, \quad T' = \frac{dq'}{d\eta'},$$

wenn man nach den Differenziationen  $\eta = 0$  und  $\eta' = 0$  macht, wodurch die Ordinate  $\zeta$  und ihre Partial-Differenzial-Quotienten  $\frac{d\zeta}{d\eta}$  und  $\frac{d\zeta}{d\eta'}$  ebenfalls Null werden. Die Coordinaten von  $M'$ , auf irgend beliebige Axen  $x$ ,  $y$ ,  $z$  bezogen, werden

$$\begin{aligned} x + \eta a + \eta' b + \zeta c, \\ y + \eta a' + \eta' b' + \zeta c', \\ z + \eta a'' + \eta' b'' + \zeta c'' \end{aligned}$$



sein, wo  $a, b$ , u. s. w. die Cosinus der Winkel sind, welche von den Axen der  $\eta, \eta', \zeta$  und denen der  $x, y, z$  gegenseitig eingeschlossen werden. Diese Cosinus sind unter sich durch Gleichungen verbunden, welche zu bekannt sind, als dass es nicht unnütz sein würde, sie hinzuschreiben. Man kann  $q'$  als eine Function dieser drei neuen Coordinaten betrachten und hat dann für die besonderen Werthe  $\eta = 0, \eta' = 0,$

$$\frac{dq'}{d\eta} = \left(\frac{dq}{dx}\right)a + \left(\frac{dq}{dy}\right)a' + \left(\frac{dq}{dz}\right)a'',$$

$$\frac{dq'}{d\eta'} = \left(\frac{dq}{dx}\right)b + \left(\frac{dq}{dy}\right)b' + \left(\frac{dq}{dz}\right)b''.$$

Die Parenthesen in den vorstehenden Partial-Differenzial-Quotienten von  $q$  sollen andeuten, dass bei den bezüglichen Differenziationen die drei Veränderlichen  $x, y, z$  als von einander unabhängig betrachtet werden sollen. Wir können  $z$  aber auch als eine durch die Gleichung für die Oberfläche von  $A$  gegebene Function von  $x$  und  $y$  betrachten und haben alsdann mit Rücksicht hierauf

$$\left(\frac{dq}{dx}\right) = \frac{dq}{dx} - \left(\frac{dq}{dz}\right)\frac{dz}{dx}, \quad \left(\frac{dq}{dy}\right) = \frac{dq}{dy} - \left(\frac{dq}{dz}\right)\frac{dz}{dy}.$$

Da ferner die Axe der positiven  $z$  die durch den Punkt  $M$ , im Innern von  $A$ , gegen dessen Oberfläche normal gelegte gerade Linie ist, so hat man

$$c = -\frac{1}{v}\frac{dz}{dx}, \quad c' = -\frac{1}{v}\frac{dz}{dy}, \quad c'' = \frac{1}{v},$$

wenn man dem  $v$  dasselbe Vorzeichen giebt, wie in dem Ausdruck für  $V$ . Ausserdem ist

$$ac + a'c' + a''c'' = 0, \quad bc + b'c' + b''c'' = 0,$$

woraus ferner

$$a'' = a\frac{dz}{dx} + a'\frac{dz}{dy}, \quad b'' = b\frac{dz}{dx} + b'\frac{dz}{dy}$$



folgt, so dass in den vorstehenden Ausdrücken für  $\frac{dq'}{d\eta}$  und  $\frac{dq'}{d\eta'}$  der Factor  $\frac{dq}{dz}$  verschwindet und demnach zur Folge hat, dass die tangentiellen Kräfte  $T$  und  $T'$  sich auf

$$T = \frac{dq}{dx} a + \frac{dq}{dy} a' \quad \text{und} \quad T' = \frac{dq}{dx} b + \frac{dq}{dy} b' \quad (8)$$

reduciren.

48. Wir können auch die Kräfte  $V$ ,  $T$ ,  $T'$ , deren Richtungen mit dem Punkte  $M$  wechseln, durch andere ersetzen, welche festen und von der Lage jenes Punktes unabhängigen Richtungen entsprechen.

Setzen wir zu dem Behuf voraus, dass man zunächst die Seitenkräfte  $V$ ,  $T$ ,  $T'$  in eine einzige Mittelkraft vereinigt, diese sodann aber nach den Axen der  $x$ ,  $y$ ,  $z$  wiederum zerlegt hätte. Seien  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , die drei neuen daraus hervorgehenden Seitenkräfte, so haben wir

$$X = Ta + T'b + Vc,$$

$$Y = Ta' + T'b' + Vc',$$

$$Z = Ta'' + T'b'' + Vc''.$$

Nun substituirt man in diesen Formeln die Werthe von  $T$  und  $T'$ , wie sie durch die Gleichungen (8) gegeben sind, und beachte, dass man hat:

$$a^2 + b^2 = 1 - c^2 = \frac{1}{v^2} \left( 1 + \frac{dz^2}{dx^2} \right),$$

$$a'^2 + b'^2 = 1 - c'^2 = \frac{1}{v^2} \left( 1 + \frac{dz^2}{dy^2} \right),$$

$$a''^2 + b''^2 = 1 - c''^2 = \frac{1}{v^2} \left( \frac{dz^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dy^2} \right),$$

$$aa' + bb' = -cc' = -\frac{1}{v^2} \frac{dz}{dx} \frac{dz}{dy},$$

$$aa'' + bb'' = -cc'' = -\frac{1}{v^2} \frac{dz}{dx},$$

$$a'a'' + b'b'' = -c'c'' = -\frac{1}{v^2} \frac{dz}{dy},$$



so folgt

$$\begin{aligned} X, &= \frac{1}{v^2} \left( 1 + \frac{dz^2}{dx^2} \right) \frac{dq}{dx} - \frac{1}{v^2} \frac{dz}{dx} \frac{dz}{dy} \frac{dq}{dy} - \frac{1}{v^2} \frac{dz}{dx} V, \\ Y, &= \frac{1}{v^2} \left( 1 + \frac{dz^2}{dy^2} \right) \frac{dq}{dy} - \frac{1}{v^2} \frac{dz}{dx} \frac{dz}{dy} \frac{dq}{dx} - \frac{1}{v^2} \frac{dz}{dy} V, \\ Z, &= \frac{1}{v^2} \frac{dz}{dx} \frac{dq}{dx} + \frac{1}{v^2} \frac{dz}{dy} \frac{dq}{dy} + \frac{1}{v^2} V. \end{aligned}$$

Setzt man nun hierin den Werth von  $V$ , wie er sich aus der Gleichung (7) ergibt, so können die vorstehenden Gleichungen in nachstehender Gestalt geschrieben werden:

$$\left. \begin{aligned} X, &= \frac{1}{v} \frac{d \left[ \frac{q}{v} \left( 1 + \frac{dz^2}{dy^2} \right) \right]}{dx} - \frac{1}{v} \frac{d \left[ \frac{q}{v} \frac{dz}{dx} \frac{dz}{dy} \right]}{dy}, \\ Y, &= \frac{1}{v} \frac{d \left[ \frac{q}{v} \left( 1 + \frac{dz^2}{dx^2} \right) \right]}{dy} - \frac{1}{v} \frac{d \left[ \frac{q}{v} \frac{dz}{dx} \frac{dz}{dy} \right]}{dx}, \\ Z, &= \frac{1}{v} \frac{d \left[ \frac{q}{v} \frac{dz}{dx} \right]}{dx} + \frac{1}{v} \frac{d \left[ \frac{q}{v} \frac{dz}{dy} \right]}{dy}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Der Druck, bezogen auf die Einheit der Fläche, welcher in jedem Punkte der Oberfläche von  $A$ , durch das benachbarte Fluidum ausgeübt wird, besteht aus zwei Theilen: der eine ist gleich  $p$  und wirkt normal von innen nach aussen; der andere ist der, dessen Seitenkräfte nach der Richtung der Axen der  $x, y, z$  durch die obigen Ausdrücke für  $X, Y, Z$ , in den Gleichungen (9) gegeben sind.

Wenn ein fester Körper ganz oder theilweise in ein schweres Fluidum getaucht ist, oder wenn das Fluidum in ein Gefäss eingeschlossen ist, so wird die Mittelkraft aus den Kräften  $p, X, Y, Z$ , den auf die Einheit der Fläche bezogenen Druck bezeichnen, den der Körper oder das Gefäss auszuhalten haben. Indessen findet dieser Druck nicht an der Oberfläche des Körpers selbst, sondern vielmehr in einer Entfernung statt, welche den Halbmesser der Molecular-Wirkungssphäre des Fluidums überschreitet,



und noch um die Dicke der am Ende der Nro. 41 besprochenen anhängenden Schicht vergrössert werden muss, wenn der Körper auf das Fluidum einwirkt. Ist der Körper schwer, so muss, wenn derselbe in Ruhe bleiben soll, der in Rede stehende Druck, bezogen auf alle Punkte der Oberfläche, welche mit dem Fluidum in Berührung sind, dem Gewicht des Körpers das Gleichgewicht halten. Das Gewicht der angrenzenden Schicht des Fluidums, welche jenem Druck unmittelbar ausgesetzt ist und welche denselben auf die Oberfläche des Körpers selbst überträgt, kann im Vergleich zu dem Gewicht des letzteren ausser Acht gelassen werden.

49. Der zweite Theil des Drucks hat eine sehr merkwürdige Eigenschaft. Die Seitenkräfte  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , welche auf alle Punkte der Oberfläche von  $A$  wirken, halten sich nemlich ohne Beihilfe irgend einer fremden Kraft das Gleichgewicht, wie immerhin die Function  $q$  von  $x$ ,  $y$ ,  $z$  und die Form von  $A$  beschaffen sein möge, vorausgesetzt, dass dieser Theil des Fluidums ganz im Innern liegt und weder eine Spitze, noch eine scharfe Kante enthält, so dass es also für keinen Punkt der Oberfläche zwei verschiedene berührende Ebenen giebt. Bei diesem Gleichgewicht wird  $A$  wie ein fester Körper betrachtet, und es handelt sich nur darum: zu zeigen, dass die Summen aller parallelen Seitenkräfte und die Summen ihrer Momente, erstreckt über die ganze Fläche, gleich Null sind.

Setzen wir voraus, dass die Axe der  $z$  vertical von unten nach oben gerichtet sei, und dass  $A$  ganz über der Ebene der  $x$ ,  $y$  liege, so wie auch, dass jede gerade Linie, welche auf dieser Ebene perpendicular steht, der Oberfläche von  $A$  in nicht mehr als zwei Punkten beegne. Da ferner die Gleichungen (9) augenscheinlich von dem Vorzeichen von  $v$  unabhängig sind, so wollen wir dahin übereinkommen, das Vorzeichen dieser Wurzelgrösse in der ganzen Ausdehnung der in Rede stehenden Oberfläche als positiv anzunehmen.

Diess vorausgesetzt, so wollen wir um die genannte Fläche einen verticalen Cylinder beschreiben, welcher durch dieselbe in zwei Theile zerlegt sein wird, in einen unteren und einen oberen. In dem ganzen ersten Theile wird die innere Normale einen spitzigen Winkel mit der Axe der  $z$  machen, und da  $v$  eine positive Grösse ist, so wird



$$c = -\frac{1}{v} \frac{dz}{dx}, \quad c' = -\frac{1}{v} \frac{dz}{dy}, \quad c'' = \frac{1}{v}$$

sein, wo  $c$ ,  $c'$ ,  $c''$  die Cosinus derjenigen Winkel sind, welche diesem Theile der Normale entsprechen. In dem ganzen obern Theile wird es die äussere Normale sein, welche mit der Axe der  $z$  einen spitzen Winkel bildet, und wenn man mit  $c$ ,  $c'$ ,  $c''$  die Cosinus der bezüglichen Winkel bezeichnet, so wird man, da  $v$  positiv ist,

$$c = -\frac{1}{v} \frac{dz}{dx}, \quad c' = -\frac{dz}{dy}, \quad c'' = \frac{1}{v}$$

haben. Wenn endlich  $ds$  das Differenzial-Element der Oberfläche von  $A$  bedeutet, und wenn man beachtet, dass dieses Element und seine Horizontalprojection  $dx dy$  positive Grössen sein müssen, so wird man, immer mit Rücksicht auf das positive Vorzeichen von  $v$ , in der ganzen Ausdehnung der in Rede stehenden Oberfläche

$$ds = v dx dy$$

haben.

Multiplirciren wir nun die Gleichungen (9) mit  $ds$  und integriren dann, indem wir die Integrale über die ganze Ausdehnung der Oberfläche erstrecken, so werden wir zufolge der vorhergehenden Formeln haben:

$$\begin{aligned} \int X, ds &= \iint \left\{ \frac{d \left[ \frac{q}{c''} (c'^2 + c''^2) \right]}{dx} - \frac{d \frac{q c c'}{c''}}{dy} \right\} dx dy \\ &\quad + \iint \left\{ \frac{d \left[ \frac{q}{c'} (c'^2 + c''^2) \right]}{dx} - \frac{d \frac{q c, c'}{c''}}{dy} \right\} dx dy, \\ \int Y, ds &= \iint \left\{ \frac{d \left[ \frac{q}{c''} (c'^2 + c''^2) \right]}{dy} - \frac{d \frac{q c c'}{c''}}{dx} \right\} dx dy \\ &\quad + \iint \left\{ \frac{d \left[ \frac{q}{c'} (c'^2 + c''^2) \right]}{dy} - \frac{d \frac{q c, c'}{c''}}{dx} \right\} dx dy \\ \int Z, ds &= \iint \left[ \frac{d(qc)}{dx} + \frac{d(qc')}{dy} \right] dx dy + \iint \left[ \frac{d(qc,)}{dx} + \frac{d(qc'')}{dy} \right] dx dy. \end{aligned}$$



Von den doppelten Integralen in jedem dieser Ausdrücke entspricht jedes Mal das erste der unteren, das zweite der oberen Oberfläche von  $A$ . Diese Integrale werden also die Berührungslinie von  $A$  mit dem umschriebenen Verticalcylinder als gemeinschaftliche Grenze haben, dergestalt, dass sie über alle diejenigen Werthe von  $x$  und  $y$  erstreckt werden müssen, welche Punkten der Grundfläche dieses Cylinders in der Ebene jener Coordinaten entsprechen.

Um die Frage nicht zu verwickeln, wollen wir noch voraussetzen, dass jede gerade, Horizontal-Linie, ebenso wie früher die verticalen, die Oberfläche von  $A$  nur in zwei Punkten treffe; daraus wird sich dann ergeben, dass eine gerade Linie, welche man in der Grundfläche des Cylinders parallel zu den Axen der  $x$  oder der  $y$  verzeichnet, den Umfang der Grundfläche nur in zwei Punkten schneiden wird. Diess vorausgeschickt, so lege man nunmehr an die krumme Linie, welche jenen Umfang bildet, zwei Tangenten, z. B. parallel zur Axe der  $y$ , deren Berührungspunkte mit dem Umfange diesen in zwei Theile zerlegen. Dann ist

$$\iint \frac{d(qc')}{dy} dx dy = \left( \int qc' dx \right) - \left[ \int qc' dx \right],$$

$$\iint \frac{d(qc'')}{dy} dx dy = \left( \int qc'' dx \right) - \left[ \int qc'' dx \right],$$

wo die in runde Klammern eingeschlossenen Integrale dem einen jener Theile, die in eckige Klammern eingeschlossenen aber dem andern entsprechen. Nun ist aber für alle Punkte der krummen Berührungs-Linie von  $A$  mit dem Verticalcylinder, und mithin auch für alle Werthe von  $x$  und  $y$ , welche der Horizontalprojection dieser Curve entsprechen, die Grösse  $q$  eine und dieselbe, mag sie nun dem oberen oder dem unteren Theil der Oberfläche von  $A$  angehören. Ferner ist in jedem von eben jenen Punkten die innere Normale für den einen dieser Theile die Verlängerung der äusseren Normale für den anderen Theil, oder mit andern Worten, die Winkel, welchen  $c$ ,  $c'$ ,  $c''$  als Cosinus angehören, sind die Supplemente von denen, deren Cosinus  $c$ ,  $c'$ ,  $c''$  sind. In den vorhergehenden einfachen Integralen wird man daher  $qc' = -qc''$  zu setzen haben, woraus dann



$$\left( \int q c' dx \right) + \left( \int q c', dx \right) = 0 \quad \left[ \int q c' dx \right] + \left[ \int q c', dx \right] = 0$$

und mithin auch

$$\iint \frac{d(qc')}{dy} dx dy + \iint \frac{d(qc',)}{dy} dx dy = 0$$

folgt. In gleicher Art findet man auch

$$\iint \frac{d(qc)}{dx} dx dy + \iint \frac{d(qc,)}{dx} dx dy = 0,$$

und wenn man diese beiden Gleichungen addirt,

$$\int Z, ds = 0.$$

In ähnlicher Weise ergibt sich

$$\int X, ds = 0, \quad \int Y, ds = 0.$$

Es sind also die Summen der Seitenkräfte, welche aus der Zerlegung der in Rede stehenden Kräfte nach der Richtung der drei Axen  $x, y, z$  entstehen, gleich Null.

Die Gleichungen (9) ergeben:

$$X, z - Z, x = \frac{1}{v} \frac{d \left\{ \frac{q}{v} \left[ \left( 1 + \frac{dz^2}{dy^2} \right) z - \frac{dz}{dx} x \right] \right\}}{dx} - \frac{1}{v} \frac{d \left\{ \frac{q}{v} \frac{dz}{dy} \left[ \frac{dz}{dx} z + x \right] \right\}}{dy},$$

$$Y, z - Z, y = \frac{1}{v} \frac{d \left\{ \frac{q}{v} \left[ \left( 1 + \frac{dz^2}{dx^2} \right) z - \frac{dz}{dy} y \right] \right\}}{dy} - \frac{1}{v} \frac{d \left\{ \frac{q}{v} \frac{dz}{dx} \left[ \frac{dz}{dy} z + y \right] \right\}}{dx},$$

$$X, y - Y, x = \frac{1}{v} \frac{d \left\{ \frac{q}{v} \left[ \left( 1 + \frac{dz^2}{dy^2} \right) z + \frac{dz}{dy} \frac{dz}{dx} x \right] \right\}}{dx}$$

$$- \frac{1}{v} \frac{d \left\{ \frac{q}{v} \left[ \left( 1 + \frac{dz^2}{dx^2} \right) z + \frac{dz}{dx} \frac{dz}{dy} y \right] \right\}}{dy},$$



und da die zweiten Glieder dieser neuen Gleichungen dieselbe Form haben, als die der Gleichungen in (9), so wird man daraus mittelst einer Analyse, ähnlich der vorigen schliessen:

$$\int (X_z - Z_x) ds = 0, \quad \int (Y_z - Z_y) ds = 0, \quad \int (X_y - Y_x) ds = 0,$$

die Integrale über die ganze Oberfläche von  $A$  erstreckt. Die Summen der Momente der Kräfte  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , in Bezug auf die Axen  $x$ ,  $y$ ,  $z$  sind also auch gleich Null, und es heben sich also diese Kräfte für die ganze Oberfläche  $A$ , auf welche dieselbe wirken, sämmtlich auf; was erwiesen werden sollte.

50. Obgleich wir der grösseren Einfachheit wegen angenommen haben, dass eine im Innern von  $A$  ganz beliebig geführte gerade Linie dessen Oberfläche nur in zwei Punkten treffe, so sieht man dennoch leicht ein, dass der vorstehende Beweis auch auf den Fall anwendbar sein wird, wenn eine grössere Menge von Durchschnittspunkten vorhanden ist, deren Zahl übrigens immer eine gerade wird sein müssen, weil die Oberfläche von allen Seiten geschlossen gedacht wird. Man muss alsdann diese Oberfläche in mehr als zwei angrenzende Theile zerlegen und die Integrale nur auf jeden dieser Theile für sich beziehen. Die Schlussfolge wird in allen Fällen dieselbe und von den Krümmungen des  $A$  unabhängig sein, mit Ausnahme des Falles jedoch, wenn in der Oberfläche scharfe Kanten vorhanden sind. Der vorstehende Beweis verlangt, dass dergleichen nicht vorhanden sind; wäre diess der Fall, dann stehen die Kräfte  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , wie sie durch die Gleichungen (9) gegeben sind, nicht mehr im Gleichgewicht.

Wenn  $A$  z. B. ein rechtwinkliges Parallelepiped ist, dessen Seitenflächen den Coordinatenebenen parallel liegen, so wird man in Bezug auf die zur Ebene der  $x$ ,  $y$  parallelen Seitenflächen haben:

$$X = \frac{dq}{dx}, \quad Y = \frac{dq}{dy}, \quad Z = 0.$$

Da  $q$  eine Function der drei Urvariabeln  $x$ ,  $y$ ,  $z$  ist, so hat man in gleicher Weise für die zur Ebene der  $x$ ,  $z$  parallelen Seitenflächen



$$X_1 = \frac{dq}{dx}, \quad Y_1 = 0, \quad Z_1 = \frac{dq}{dz},$$

und für diejenigen, welche der Ebene der  $y, z$  parallel sind,

$$X_2 = 0, \quad Y_2 = \frac{dq}{dy}, \quad Z_2 = \frac{dq}{dz}.$$

Wenn man aber nicht

$$\frac{dq}{dx} = \frac{dq}{dy}, \quad \frac{dq}{dx} = \frac{dq}{dz}, \quad \frac{dq}{dz} = \frac{dq}{dy}$$

hat, d. h. wenn  $q$  nicht eine Function von  $x + y + z$  ist, so thun diese neun Seitenkräfte, wenn man sie mit  $P, Q$ , u. s. w. vergleicht, den Bedingungen der Nro. 38, welche aus der Betrachtung der Momente abgeleitet sind, kein Genüge und folglich werden sich diese Kräfte nicht im Gleichgewicht erhalten.

Denkt man sich ferner  $q$  constant, und nimmt für  $A$  einen Cylinder von kreisförmiger Grundfläche, dessen Axe der Axe der  $z$  parallel ist; vertauscht man sodann, der grösseren Allgemeinheit wegen, seine beiden Grundflächen mit Kugelsegmenten von verschiedenem Halbmesser, so dass die Durchschnitte derselben mit der Mantelfläche des Cylinders scharfe Kante bilden, so wird man leicht einsehen, dass auch alsdann zwischen den Seitenkräften  $X, Y, Z$ , kein Gleichgewicht besteht. Da nemlich um die Axe des Cylinders herum Alles ähnlich ist, so werden sich die Kräfte, welche parallel zur Ebene der  $x, y$  liegen, sich zu je zwei und zwei gegenseitig aufheben, auch werden, da  $q$  constant ist, die Kräfte, welche auf jener Ebene senkrecht stehen und die Mantelfläche von  $A$  angreifen, gleich Null sein. Es bleiben mithin nur noch die Kräfte übrig, welche parallel zur Axe des Cylinders auf die beiden sphärischen Grundflächen wirken. Diese aber werden einander nicht gleich sein; sie werden sogar, wenn eine der Grundflächen concav und die andere convex ist, nach einerlei Richtung wirken. Das Gleichgewicht wird also unmöglich sein.

Diese beiden Beispiele genügen, um zu zeigen, dass die in Rede stehenden Kräfte sich nicht das Gleichgewicht halten, wenn in der Oberfläche von  $A$  scharfe Kanten vorhanden sind. Auf der andern Seite ist jedoch zu beachten,



dass die Seitenkräfte  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , in Verbindung mit der normalen Kraft  $p$  nicht vollständig den Moleculardruck ausdrücken, welcher in einem Punkte  $M$  stattfindet, der einer scharfen Kante sehr nahe liegt, indem die Analyse die uns zu den Ausdrücken für diese Kräfte geführt hat, die Continuität der Oberfläche von  $A$  als wesentlich voraussetzt. Wenn diese Oberfläche aus zwei Theilen zusammengesetzt ist, deren Tangentialebenen an den Punkten, wo jene zusammenstossen, einen endlichen Winkel bildet, so dass die Oberfläche hier eine scharfe Kante hat, oder wenn die Kante zwar abgerundet ist, jedoch eine Dicke hat, welche den Halbmesser der Molecular-Wirkungssphäre nicht übertrifft und wenn zugleich der Punkt  $M$  von derselben weniger entfernt ist, als um die Länge jenes Halbmessers, dann werden nicht mehr alle die auf der Oberfläche von  $A$  perpendicular stehenden Fäden, in welche wir die beiden benachbarten Theile des Fluidums zerlegt haben, sich bis zur Grenze der Molecularwirkung erstrecken und es wird nicht mehr erlaubt sein, sie als prismatisch zu betrachten, wie diess in Nro. 44 geschehen ist. Eben so wenig wird man dann, wie in den Nummern 45 und 46 die Ordinate  $\zeta$  für die Oberfläche durch die Formel (2) ausdrücken können. Man wird also dann auf andere Mittel zurückkommen müssen, um in Bezug auf einen solchen Punkt  $M$  denjenigen Theil des Drucks zu bestimmen, welcher von der Form von  $A$  abhängig ist. Dieser Theil wird sich übrigens mit der wachsenden Entfernung des  $M$  von der scharfen Kante sehr schnell ändern. Unterwirft man ihn einer neuen Summation, um daraus den entsprechenden Theil des Drucks herzuleiten, welcher in unmerklicher Entfernung auf der einen und der andern Seite der scharfen Kante statt hat, so wird man als Resultat eine Kraft von merklicher Grösse erhalten können, welche nicht vernachlässigt werden darf und zu dem Gleichgewicht des auf die ganze Oberfläche wirkenden Drucks merklich beiträgt. Die Betrachtung dieses Gleichgewichts liefert, wie wir diess in einer der folgenden Nummern zeigen werden, das Mittel für die Bestimmung des Drucks in Bezug auf scharfe Kanten, welcher sonst auf directem Wege schwer zu ermitteln sein würde.

51. Da die Kräfte  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , welche auf alle Punkte der Oberfläche von  $A$  wirken, sich gegenseitig aufheben, wenn keine scharfe Kanten vor-



handen sind, so folgt daraus, dass wenn wir dem  $A$  eine Oberfläche geben, welche dergleichen nicht darbietet, alsdann der normale Druck  $p$ , welcher in der ganzen Ausdehnung der Oberfläche wirkt, den gegebenen Kräften das Gleichgewicht halten müsse, die in allen Punkten von  $A$  thätig sind. Der Einfachheit wegen wollen wir für  $A$  eine Kugel nehmen, deren Mittelpunkt der Punkt  $M$  ist, welcher den Coordinaten  $x, y, z$  entspricht. Die für den Punkt  $M$  gegebene Kraft, bezogen auf die Einheit der Masse, sei nach den Richtungen der Coordinatenaxen zerlegt, dergestalt, dass die daraus hervorgehenden Seitenkräfte  $X, Y, Z$  die Coordinaten zu vergrössern streben. Die Dichtigkeit des Fluidums im Punkte  $M$  heisse  $\rho$ , und der Halbmesser der Kugel sei klein genug, so dass man  $X, Y, Z, \rho$  in der ganzen Ausdehnung derselben ohne merklichen Fehler als constant ansehen dürfe. Ist  $l$  der Halbmesser der Kugel, so ist  $\frac{4\pi l^3 \rho}{3}$  die Masse von  $A$  und die Total-Seitenkräfte der gegebenen Kräfte, welche auf diese Masse wirken, werden

$$\frac{4\pi l^3 \rho}{3} X, \quad \frac{4\pi l^3 \rho}{3} Y, \quad \frac{4\pi l^3 \rho}{3} Z,$$

sein. Sei  $M'$  ein beliebiger Punkt der Oberfläche von  $A$ , ferner  $\theta$  der Winkel, welchen der Halbmesser  $MM'$  mit einer geraden Linie einschliesst, die parallel zur Axe der  $Z$  durch den Mittelpunkt der Kugel gelegt ist, sodann  $\psi$  der Winkel, welchen die Ebene dieser beiden geraden Linien mit einer zur Ebene der  $x, z$  parallel gelegten und durch die zuletzt genannte Linie geführten Ebene einschliesst. Dann werden die Coordinaten von  $M'$ , bezogen auf dieselben Axen wie die für  $M$ , die nachstehenden sein

$$x + l \sin \theta \cos \psi, \quad y + l \sin \theta \sin \psi, \quad z + l \cos \theta,$$

und wenn man das Quadrat von  $l$  vernachlässigt, so wird die Grösse  $p$  in Bezug auf diesen Punkt  $M'$  werden:

$$p + \frac{dp}{dx} l \sin \theta \cos \psi + \frac{dp}{dy} l \sin \theta \sin \psi + \frac{dp}{dz} l \cos \theta.$$

Dieser normale Druck wirkt von aussen nach innen, und die Cosinus der Winkel, welche derselbe mit geraden Linien einschliesst, die parallel zu den Axen der  $x, y, z$  durch  $M'$  gelegt sind, werden



$$- \sin\theta \cos\psi, \quad - \sin\theta \sin\psi, \quad - \cos\theta$$

sein. Multiplicirt man die vorstehende Formel mit diesen Cosinus, so wird man die Seitendrucke für den Punkt  $M'$ , bezogen auf die Einheit der Fläche haben, und multiplicirt man ferner mit  $l^2 \sin\theta d\theta d\psi$ , dem Differenzialelement der Kugeloberfläche, und integrirt sodann von  $\theta = 0$  und  $\psi = 0$  bis  $\theta = \pi$  und  $\psi = 2\pi$ , so wird man die drei Seitendrucke für die ganze Oberfläche  $A$  erhalten. Diese Seitendrucke, beziehlich parallel den Axen der  $x, y, z$  sind

$$-\frac{4\pi l^3}{3} \frac{dp}{dx}, \quad -\frac{4\pi l^3}{3} \frac{dp}{dy}, \quad -\frac{4\pi l^3}{3} \frac{dp}{dz}.$$

Ich füge dieselben zu den Seitenkräften derjenigen Kraft, welche auf die Masse von  $A$  wirkt; ich setze sodann die Summe aller Kräfte, welche parallel zu den verschiedenen Axen wirken, für jede dieser Axen in sich gleich Null; und erhalte auf diese Weise die drei Gleichungen für das Gleichgewicht von  $A$ . Unterdrückt man sodann den gemeinschaftlichen Factor  $\frac{4\pi l^3}{3}$ , so werden diese drei Gleichungen:

$$\rho X - \frac{dp}{dx} = 0, \quad \rho Y - \frac{dp}{dy} = 0, \quad \rho Z - \frac{dp}{dz} = 0, \quad (10)$$

und sie werden bestehen müssen für alle Werthe von  $x, y, z$ , welche sich auf Punkte des Fluidums beziehen, die in einer merklichen Entfernung von der Oberfläche liegen.

Multiplicirt man sie beziehlich mit  $dx, dy, dz$  und addirt sie, so ziehen sie sich in die einzige Gleichung

$$dp = \rho (X dx + Y dy + Z dz) \quad (11)$$

zusammen. Soll das Gleichgewicht des Fluidums also möglich sein, so müssen die gegebenen Kräfte von der Art sein, dass der Ausdruck  $X dx + Y dy + Z dz$ , multiplicirt mit der Dichtigkeit  $\rho$ , das vollständige Differenzial einer Function von drei unabhängig Veränderlichen  $x, y, z$  sei. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, dann wird die Gleichung (11) den Druck  $p$  in jedem Punkte im Innern des Fluidums kennen lehren und die Grösse des mittleren Zwischenraums  $\varepsilon$ , welche



nach Nro. 42 der einzige Unbekannte des Problems ist, wird in impliciter Weise mittelst der ersten Gleichung unter (4) in Function von  $x, y, z$  bestimmt sein.

52. Gehen die wirkenden Kräfte von bestimmten festen Punkten aus, und sind ihre Intensitäten Functionen irgend welcher Art von der Entfernung zwischen ihren Angriffspunkten und den Punkten, von wo sie ausgehen, so ist der Ausdruck  $Xdx + Ydy + Zdz$  immer ein vollkommenes Differenzial. Dieser Fall umfasst alle Kräfte, welche in der Natur vorkommen. Bedeutet daher  $\varphi$  eine Function von  $x, y, z$ , so wird man

$$Xdx + Ydy + Zdz = d\varphi$$

setzen dürfen, und die Gleichung (11) wird dann

$$dp = \rho d\varphi.$$

Für das Gleichgewicht eines Fluidums ist also nothwendig, dass  $\rho$  eine Function von  $\varphi$  sei, damit diese Gleichung möglich ist;  $p$  wird dann auch eine Function derselben Grösse  $\varphi$  sein. In dem Falle des Gleichgewichts sind mithin  $p$  und  $\rho$  constant oder variabel, jenachdem die Function  $\varphi$  es ist. Wenn man nun unter  $c$  eine beliebige Constante versteht, und derselben nach und nach eine unendliche Menge verschiedener Werthe beilegt, so wird die Gleichung  $\varphi = c$  einer eben so grossen Anzahl von Flächen entsprechen, welche die Masse des Fluidums in Schichten von unendlich geringer Dicke zerlegen. Der Bedingung des Gleichgewichts zufolge wird mithin jede dieser Schichten in ihrer ganzen Ausdehnung einerlei Dichtigkeit haben und auch einerlei Druck erleiden, wozu im Allgemeinen erforderlich ist, dass in einer und derselben Schicht der Zwischenraum  $\varepsilon$ , die Materie des Fluidums und seine Temperatur von einem Punkte zum andern nicht wechseln.

Wenn es sich um eine homogene tropfbare Flüssigkeit handelt, welche überall dieselbe Temperatur hat, so wird die Dichtigkeit derselben in der ganzen Masse keine merkliche Verschiedenheit zeigen und dasselbe wird auch in Betreff des mittleren Zwischenraums der Fall sein; diess wird jedoch nicht hindern, dass der Druck  $p$  von einer Schicht zur andern in einem beliebigen Verhältniss sich ändern könne, nach Maassgabe der gegebenen Kräfte  $X, Y, Z$ ,



und diese Veränderung wird nicht mit der ersten Gleichung unter (4) unverträglich sein, wie wir diess schon bemerklich gemacht haben, weil die Function  $R$ , welche unter dem Summenzeichen enthalten ist, in der Natur von zwei Kräften herrührt, welche in entgegengesetzten Richtungen wirken und weil die Summe  $\Sigma r R$  sich nicht bloss auf ein Integral reducirt.

In heterogenen tropfbaren Flüssigkeiten kann die Dichtigkeit  $\rho$  bei dem Uebergange von einer Schicht zur andern nach einer willkürlichen Function von  $\varphi$  wechseln und das Gesetz für den Druck  $p$  lässt sich sodann aus dem für  $\rho$  mittelst der Gleichung  $dp = \rho d\varphi$  ableiten. In den luftförmigen Fluiden existirt eine durch die Erfahrung gegebene Relation zwischem dem Druck  $p$ , der Dichtigkeit  $\rho$  und der Temperatur; wenn daher die Temperatur bekannt oder in willkürlicher Art in Function von  $\varphi$  gegeben ist, so wird diese Relation, in Verbindung mit der Gleichung  $dp = \rho d\varphi$  die Gesetze des Drucks und der Dichtigkeit kennen lehren.

Die Schichten von gleicher Dichtigkeit werden auch Niveau-Schichten (*couches de niveau*) genannt, weil sie die Eigenschaft haben, in jedem ihrer Punkte auf der Mittelkraft der gegebenen Kräfte  $X, Y, Z$ , welche in diesem Punkte auf das Fluidum wirken, perpendicular zu sein. Da nemlich  $d\varphi = 0$ , oder

$$X dx + Y dy + Z dz = 0$$

die Differenzial-Gleichung für dieselben ist, so sind die Cosinus der Winkel, welche die Normale in irgend einem Punkte einer dieser Schichten mit der Axe der  $x, y, z$  macht,

$$\frac{X}{U}, \quad \frac{Y}{U}, \quad \frac{Z}{U},$$

wo  $U$  die Wurzelgrösse  $\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$  bedeutet. Nun sind aber diese Cosinus auch diejenigen für die Winkel, welche von denselben Axen und der Mittelkraft aus  $X, Y, Z$  eingeschlossen werden; folglich fällt die Richtung dieser Kraft mit der Normale für jeden Punkt in jeder Schicht von gleicher Dichtigkeit zusammen.



53. Da die Gleichungen (10) aus den Gleichungen unter (12) in Nro. 24 hervorgehen, wenn man darin

$$P_3 = Q_2 = R_1 = p,$$

und die andern sechs Kräfte  $P_1, Q_1, u. s. w.$  der Null gleich setzt, so wird man daraus, wie in Nro. 29 folgern können, dass

$$\int X dm = \int p \cos \alpha ds, \quad \int Y dm = \int p \cos \beta ds, \quad \int Z dm = \int p \cos \gamma ds$$

ist. Es bedeuten dabei  $dm$  und  $ds$  die Differenzial-Elemente der Masse und der Oberfläche irgend eines Theils  $A$  des Fluidums;  $\alpha, \beta, \gamma$  die Cosinus der Winkel, welche die innere Normale oder die Richtung der Kraft  $p$  in irgend einem Punkte jener Oberfläche mit geraden Linien einschliesst, die parallel zu den Axen der  $x, y, z$  durch diesen Punkt gelegt sind. Die Integrale in den ersten Gliedern sind über die ganze Masse von  $A$ , und die in den zweiten Gliedern über die ganze Oberfläche zu erstrecken. Die Gleichungen (10) ergeben diese anderen:

$$Xy - Yx = \frac{d(py)}{dx} - \frac{d(px)}{dy},$$

$$Zx - Xz = \frac{d(px)}{dz} - \frac{d(pz)}{dx},$$

$$Yz - Zy = \frac{d(pz)}{dy} - \frac{d(py)}{dz},$$

und wenn man diese mit den Gleichungen unter (12) in Nro. 24 zusammenstellt, so folgt

$$\int (Xy - Yx) dm = \int (yp \cos \alpha - xp \cos \beta) ds,$$

$$\int (Zx - Xz) dm = \int (xp \cos \gamma - zp \cos \alpha) ds,$$

$$\int (Yz - Zy) dm = \int (zp \cos \beta - yp \cos \gamma) ds,$$



wo die Integrale ebenfalls über die ganze Masse und über die ganze Oberfläche von  $A$  zu erstrecken sind. Diese sechs Gleichungen zeigen uns aber, dass der Druck  $p$ , welchen die ganze Oberfläche des Theiles  $A$  des Fluidums erleidet, den gegebenen Kräften  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , das Gleichgewicht hält, die auf die ganze Masse von  $A$  wirken, und zwar gilt dieses, welches immerhin die Form von  $A$  sein möge, wenn nur alle Punkte desselben sich in einer merklichen Entfernung von der Oberfläche des Fluidums befinden und wenn die Abmessungen desselben sehr gross sind im Vergleich zum Halbmesser der Molecularwirkungssphäre.

Diese Schlussfolge wird selbst dann noch richtig sein, wenn die Oberfläche von  $A$  eine oder mehrere scharfe Kanten enthält, indem man ohne merklichen Fehler den Druck  $p$  auf einer unmerklichen Strecke auf dieser und der andern Seite jeder scharfen Kante wird vernachlässigen können. In diesem Falle werden mithin die besonderen Drucke, welche in diesen scharfen Kanten statt haben, und welche in den durch die Gleichungen (9) gegebenen Kräften  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , nicht mit inbegriffen sind, den genannten Kräften nothwendig das Gleichgewicht halten müssen; ein Umstand, der dazu dienen kann, die in Rede stehenden Drucke zu bestimmen.

Nehmen wir, um diess zu zeigen, das zweite Beispiel der Nro. 50 wieder vor. Bedeute  $l$  den Halbmesser des Cylinders und nehmen wir an, dass er vertical von unten nach oben gerichtet sei. Man denke sich den Druck, welcher irgend einem Punkte der unteren Kante entspricht, bezogen auf die Einheit der Länge, nach der Richtung des Cylinders zerlegt und die bezügliche Seitenkraft heisse  $f$ . Dasselbe bedeute  $f'$ , welches im entgegengesetzten Sinne wirkt, in Bezug auf die obere scharfe Kante. Die Halbmesser der Kugelabschnitte, welche  $A$  oben und unten begrenzen, mögen  $a$  und  $a'$  heissen. Endlich sei  $l$  sowie die Höhe von  $A$  unbeträchtlich genug, so dass man die Kräfte  $f$  und  $f'$  und die Grösse  $q$  in der Formel (7) für constant ansehen kann. Dann werden die verticalen und entgegengesetzten Kräfte, welche auf die zwei Kanten von  $A$  wirken,  $2\pi lf$  und  $2\pi lf'$  sein, weil ihre gemeinschaftliche Länge  $2\pi l$  ist. Die durch die Formel (7) gegebene Kraft  $V$  wird in der ganzen Ausdehnung von jedem der begrenzenden Kugelabschnitte ebenfalls constant und gleich  $\frac{2q}{a}$  für den einen, sowie gleich  $\frac{2q}{a'}$  für den andern sein, wobei jeder der



Halbmesser  $a$  und  $a'$  als positiv oder als negativ zu betrachten ist, jenachdem die zugehörige Grundfläche ihre convexe Seite in Bezug auf  $A$  nach aussen oder nach innen kehrt, während die Richtung der normalen Kraft  $V$  immer als von aussen nach innen gewendet vorausgesetzt wird. Die verticalen, von unten nach oben gerichteten Kräfte, welche aus  $V$  entspringen und auf die beiden sphärischen Grundflächen von  $A$  wirken, werden mithin durch die Producte  $\frac{2q}{a} \pi l^2$  und  $-\frac{2q}{a'} \pi l^2$  ausgedrückt sein, wo dann der Factor  $\pi l^2$  der Flächenraum der Horizontalprojection jener Grundflächen oder des auf die Axe von  $A$  perpendicular geführten Schnittes ist. Für das von uns betrachtete Gleichgewicht der verticalen Kräfte muss also

$$2\pi lf - 2\pi lf' + \frac{2\pi l^2 q}{a} - \frac{2\pi l^2 q}{a'} = 0$$

sein, und es ist nicht nöthig, auf die horizontalen Kräfte Rücksicht zu nehmen, da diese sich je zu zwei und zwei um die Axe von  $A$  herum gegenseitig aufheben.

Die obige Gleichung ist gleichbedeutend mit

$$f + \frac{lq}{a} = f' + \frac{lq}{a'};$$

da aber die unbekannten Werthe von  $f$  und  $f'$  beziehlich nur von  $a$  und  $a'$  abhängen können, so wird abgesondert

$$f + \frac{lq}{a} = c, \quad f' + \frac{lq}{a'} = c$$

sein müssen, wo  $c$  eine von  $a$  und  $a'$  unabhängige Grösse ist. Behufs Bestimmung derselben beachte man, dass für den Fall, wenn die untere Grundfläche eine Halbkugel, d. h. wenn  $a = l$  ist, alsdann diese Grundfläche und die Mantelfläche des Cylinders in jedem ihrer Durchschnittspunkte einerlei Berührungsebene haben und mithin die untere scharfe Kante verschwindet. Es muss also dann  $f = 0$  sein, woraus  $c = q$  und mithin

$$f = q \left( 1 - \frac{l}{a} \right)$$



für jeden beliebigen Werth von  $a$  folgt. Der grösste Werth von  $f$  findet für den Fall einer concaven Halbkugel statt, es ist nemlich dann  $a = -l$  und  $f = 2q$ . Geht die Kugel in eine Ebene über, so hat man  $a = \infty$  und  $f = q$ , d. h. die Hälfte des grösstmöglichen Werthes.

## §. VI.

### *Gleichungen in Bezug auf die Trennungsfläche zweier übereinander- liegender Fluida.*

54. Ausser den Gleichungen (10) der Nr. 51, welche für alle inneren Punkte jedes der beiden Fluida gelten werden, giebt es noch andere, welche sich speciell nur auf die Punkte ihrer Trennungsfläche beziehen. Diese neuen Gleichgewichtsgleichungen sind es, deren Untersuchung uns nun beschäftigen wird.

Sei  $M$  ein Punkt, der in einer Entfernung von dieser Fläche liegt, welche zwar unmerklich klein, dennoch aber grösser ist, als der Halbmesser der Molecular-Wirkungssphäre; von diesem Punkte aus werde ein Perpendikel auf die Fläche gefällt, welcher sie in einem Punkte  $O$  treffen möge. Dieser Perpendikel werde über die Fläche hinaus verlängert, bis er einen Punkt  $M$ , trifft, der so liegt, dass auch die Entfernung  $OM$ , unmerklich klein aber dennoch grösser als der Halbmesser der Molecularwirkungssphäre ist. Um den Punkt  $O$  herum werde die Trennungsfläche mittelst zweier Systeme von sehr naheliegenden Krümmungslinien in gleiche Theile getheilt, dergestalt, dass die Abmessungen der letzteren im Vergleich zu jenem Halbmesser unmerklich klein, im Vergleich zu den Molecularzwischenräumen dagegen sehr gross sind. Auf den vorgenannten Krümmungslinien errichte man nun Normalen, welche abwickelbare Flächen bilden werden und endlich lege man durch die Punkte  $M$  und  $M$ , zwei Flächen, welche der Trennungsfläche parallel, und eben so wie diese getheilt sind, und die Normalen unter rechten Winkeln schneiden. Bezeichne  $A$  die Schicht des Fluidums, welche zwischen den beiden durch die Punkte  $M$  und  $M$ , geführten Flächen liegt. Diese Schicht von unmerklicher Dicke wird durch die abwickelbaren Flächen in normale Fäden abgetheilt sein, und einer dieser



letzteren wird die gerade Linie  $MOM$ , zur Axe haben; er heisse  $B$ . Der besseren Anschaulichkeit wegen wollen wir annehmen, dass diese Axe vertical sei und dass der Punkt  $M$ , über dem Punkte  $M$  liege, und wir wollen überdem das unter  $A$  liegende Fluidum, wovon  $M$  ein Theil ist, das untere Fluidum nennen, das über  $A$  liegende dagegen, wozu der Punkt  $M$ , gehört, das obere.

In der Nähe der Fläche, welche den beiden aus verschiedener Materie bestehenden Fluiden gemeinschaftlich ist, wird die Compression von dem Gesetz der Molecularwirkung abhängen, und da die Function, welche dieses Gesetz ausdrückt, sich in reissend schneller Weise ändert, so wird auch die Dichtigkeit in der normalen Richtung in gleicher Weise sich ändern, so dass sie in jedem der beiden Fluiden sehr verschieden sein kann, sowohl an der Trennungsfläche selbst, als auch in unmerklicher Tiefe. Da uns die Form dieser Function der Entfernung nicht bekannt ist, so können wir die Veränderung in der Dichtigkeit nach der Länge des Fadens  $B$  nicht bestimmen; indessen können wir, unabhängig von dieser Function und von dem Gesetz der Dichtigkeit, welches aus ihr hervorgeht, die Totalkräfte berechnen, welche auf den Faden des Fluidums wirken, und können hieraus die Bedingungen seines Gleichgewichts folgern. Die Gleichungen, durch welche diese Bedingungen ausgedrückt werden, sind das, um was es sich handelt.

55. Bezeichnen wir, um zu ihnen zu gelangen, mit  $N$  und  $N'$  die beiden Normaldrucke, bezogen auf die Einheit der Fläche, welche in den Punkten  $M$  und  $M$ , statt haben, und in einander entgegengesetzten Richtungen von Aussen nach dem Innern von  $A$  wirken. Die Seitenkräfte des tangentiellen Drucks, ebenfalls bezogen auf die Einheit der Fläche, seien:  $T$  und  $T'$  im Punkte  $M$  und  $T$ , und  $T'$  im Punkte  $M$ ,, und es werde dabei vorausgesetzt, dass  $T$  und  $T$ , einerlei Richtung haben, so wie auch  $T$ , und  $T'$ . Bezeichnen wir ferner mit  $w$  und  $kw$  die untere und obere Grundfläche des Fadens  $B$ , so dass  $k$  von der Einheit nur um eine Grösse differirt, welche der Dicke von  $A$  proportional ist. Dann werden die Kräfte, welche aus der Wirkung des unteren Fluidums auf den Faden  $B$  entspringen,  $Nw$ ,  $Tw$ ,  $T'w$  sein, diejenigen dagegen, welche aus der Wirkung des oberen Fluidums herrühren, werden, nach denselben Richtungen gerechnet, durch  $-Nkw$ ,  $Tkw$ ,  $T'kw$  ausgedrückt sein.



$N_2w$ ,  $T_2w$ ,  $T_1w$  mögen, ebenfalls nach denselben Richtungen die Seitenkräfte derjenigen Wirkung sein, welche von der Schicht  $A$  auf den zu derselben gehörenden Faden  $B$  ausgeübt wird. Endlich seien  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  und  $X_1$ ,  $Y_1$ ,  $Z_1$ , gegebene und auf die Einheit der Masse bezogene Kräfte, welche in denselben Richtungen, wie die vorgenannten, beziehlich auf die Punkte  $M$  und  $M_1$  wirken. Diejenigen, welche auf den unteren Theil von  $B$  wirken, werden  $Xlw\delta$ ,  $Ylw\delta$ ,  $Zlw\delta$  sein, wenn man die mittlere Dichtigkeit desselben mit  $\delta$  und die Länge von  $MO$  mit  $l$  bezeichnet; die für den oberen Theil dagegen werden durch  $X_1l_1w\delta_1$ ,  $Y_1l_1w\delta_1$ ,  $Z_1l_1w\delta_1$  ausgedrückt sein, wenn  $\delta_1$  dessen mittlere Dichtigkeit und  $l_1$  die Länge von  $M_1O$  bezeichnet, so dass  $l + l_1$  die ganze Länge von  $B$  oder die Dicke von  $A$  ist. Die Quadrate von  $l$  und  $l_1$  werden ausser Acht gelassen, und es ist dann erlaubt,  $lw$  und  $l_1w$  als die Volumina der beiden Theile von  $B$  zu betrachten,  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ,  $X_1$ ,  $Y_1$ ,  $Z_1$ , aber als constante Grössen anzusehen. Für das Gleichgewicht dieses Fadens des Fluidums ist es dann nöthig, dass die Summe der einwirkenden Kräfte nach jeder ihrer drei Richtungen Null sei; wenn man daher den gemeinschaftlichen Factor  $w$  unterdrückt, so wird man haben

$$\left. \begin{aligned} T + kT_1 + T_2 + Xl\delta + X_1l_1\delta_1 &= 0 \\ T' + kT'_1 + T'_2 + Yl\delta + Y_1l_1\delta_1 &= 0 \\ N - kN_1 + N_2 + Zl\delta + Z_1l_1\delta_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

und die Aufgabe wird darin bestehen, die Ausdrücke für die aus der Molecular-Wirkungssphäre entspringenden neun Kräfte zu bilden, welche in diesen drei Gleichungen vorkommen.

Nun können wir aber die unmerkliche Entfernung  $OM$  des Punktes  $M$  von der Trennungsfläche der beiden Fluida dessungeachtet für gross genug ansehen, dass die Wirkung des unteren Theils von  $B$  sich nicht bis zu denjenigen Punkten erstreckt, wo die Compression in der normalen Richtung sehr schnell wechselt. Wenn man sodann das untere Fluidum für dasjenige nimmt, welches wir in dem vorigen Paragraphen betrachtet und mit  $A'$  bezeichnet haben, so werden die Werthe von  $N$ ,  $T$  und  $T'$  durch diejenigen Formeln ausgedrückt sein, welche sich auf die inneren Punkte dieses Fluidums beziehen. Dann werden wir also, da die Coordinaten  $x$ ,  $y$ ,  $z$  die des Punktes  $M$  sind und wenn



man die Axe der  $z$  vertical von unten nach oben gerichtet annimmt, zufolge der Gleichungen (5) und (6) in Nro. 46 haben:

$$N = p + q \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} \right), \quad T = \frac{dq}{dx}, \quad T' = \frac{dq}{dy},$$

und wir werden die Krümmungshalbmesser  $\lambda$  und  $\lambda'$  für den Punkt M als positiv oder negativ ansehen, jenachdem die Schicht A in diesem Punkte convex oder concav ist.

Die Coordinaten von M, werden  $x, y$  und  $z + l + l$ , und die Krümmung von A in M, wird von der in M nicht merklich verschieden sein; dagegen wird diese Schicht des Fluidums, wenn sie in M convex ist, in M, concav sein und umgekehrt. Hiernach hat man, wenn die zwar merkliche Entfernung OM, dennoch gross genug ist, dass M, als ein innerer Punkt betrachtet werden darf, und wenn man mit  $p$ , und  $q$ , die Werthe von  $p$  und  $q$  in Bezug auf das obere Fluidum und den dazu gehörenden Punkt M, bezeichnet,

$$N_1 = p_1 - q_1 \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} \right), \quad T_1 = \frac{dq_1}{dx}, \quad T'_1 = \frac{dq_1}{dy},$$

wo die Vorzeichen und die Werthe von  $\lambda$  und  $\lambda'$  dieselben sind, wie in dem Ausdruck für N.

Substituirt man nun diese verschiedenen Werthe in den Gleichungen (1), lässt die Glieder ausser Acht, welche wegen des Factors  $l$  oder  $l$ , unmerklich sind und setzt zu gleicher Zeit  $k=1$ , so kommt

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(q + q_1)}{dx} + T_1 &= 0 \\ \frac{d(q + q_1)}{dy} + T'_1 &= 0 \\ p - p_1 + (q + q_1) \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} \right) + N_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Die Werthe von  $p$  und  $p_1$ , werden durch die Gleichungen für das Gleichgewicht in Bezug auf die inneren Punkte der beiden Fluida gegeben sein, und zufolge der Nro. 52 wird man



$dp = \rho d\varphi$ ,  $dp_1 = \rho_1 d\varphi_1$ ,  
haben. Hier ist  $\rho$  die Dichtigkeit des unteren Fluidums im Punkte  $M$ , und  $\varphi$  bezeichnet eine Function der Coordinaten des letzteren, deren Parzieldifferenzialien die Seitenkräfte für die auf den Punkt  $M$  wirkende gegebene Kraft ausdrücken;  $\rho_1$  und  $\varphi_1$  dagegen sind die analogen Grössen in Bezug auf den Punkt  $M$ , des oberen Fluidums, dessen Molecüle durch gegebene Kräfte angegriffen sein können, welche von den in dem unteren Fluidum wirksamen verschieden sind. Was die Grössen  $q$  und  $q_1$  anbelangt, so denkt man sich, dass sie für die beiden in Rede stehenden Fluida gegeben seien. Es bleiben mithin nur noch die Ausdrücke für die Seitenkräfte  $N_2$ ,  $T_2$ ,  $T_2'$  zu bilden. Diese Ermittlung der Wirkung in einem Fluidum, welche eine Schicht desselben, in der die Compression nach der Richtung der Dicke sehr schnell wechselt, auf einen zu ihr gehörigen normalen Faden ausübt, ist ein neues Problem, und wird der Gegenstand der nachfolgenden Analyse sein.

56. Sei  $M'$  ein Punkt der unteren Fläche von  $A$ , welcher in unmerklicher Entfernung von  $M$  liegt, und sei  $B'$  der Faden von  $A$ , welcher dem  $M'$  entspricht.  $m$  und  $m'$  seien zwei Punkte von  $A$ , welche beziehlich den beiden Fäden  $B$  und  $B'$  angehören. Von diesen Punkten aus fälle man Perpendikel auf die untere Fläche von  $A$ , deren Treffpunkte in dieser Fläche  $o$  und  $o'$  heissen mögen. Sodann seien  $s$  und  $s'$  die Längen der beiden geraden Linien  $mo$  und  $m'o'$ ;  $u$  und  $v$  die horizontalen Coordinaten von  $o$ , deren Anfangspunkt in  $M$  liege;  $\eta$  und  $\eta'$  die Coordinaten von  $o'$ , bezogen auf dieselben Axen, wie  $u$  und  $v$ ; und im Uebrigen seien die andern Bezeichnungen der Nro. 45 auch hier gültig. Die Formeln dieser Nro. setzten voraus, der Punkt  $m'$  liege unter  $A$ ; verwandelt man daher in jenen Formeln das Vorzeichen von  $s'$  in das entgegengesetzte, so kommt:

$$r' = r + \frac{\sigma}{r},$$

$$\cos \alpha = \frac{\eta - u}{r} - \left( s' \frac{d\zeta}{d\eta} - s \frac{dw}{du} \right) \frac{1}{r},$$

$$\cos \beta = \frac{\eta' - v}{r} - \left( s' \frac{d\zeta}{d\eta'} - s \frac{dw}{dv} \right) \frac{1}{r},$$

$$\cos \gamma = \frac{s' - s}{r} + \frac{\zeta - w}{r},$$



wo die Grössen  $r$  und  $\sigma$  durch die Gleichungen

$$r^2 = (\eta - u)^2 + (\eta' - v)^2 + (s - s')^2,$$

$$\sigma = (s + s')(\zeta - w) - \left( \eta \frac{dw}{du} + \eta' \frac{dw}{dv} \right) s' - \left( u \frac{d\zeta}{d\eta} + v \frac{d\zeta}{d\eta'} \right) s,$$

die Werthe von  $\zeta$  und  $w$  aber durch die Gleichungen

$$\zeta = E\eta^2 + E'\eta'^2 + E''\eta'\eta,$$

$$w = Eu^2 + E'v^2 + E''uv$$

gegeben sind.

Da die beiden Fäden  $B$  und  $B'$  jeder eine sehr grosse Anzahl von Molecülen in sich begreifen, so wollen wir annehmen, dass es für die Berechnung der Wirkung von  $B'$  auf  $B$  und für die gleichzeitige Berücksichtigung des Wechsels in der Dicke und in den Molecularzwischenräumen ausreiche, an die Stelle der gegenseitigen Wirkung zwei beliebiger Punkte  $m$  und  $m'$  eine andre Kraft zu setzen, welche längs der geraden Linie  $mm'$  wirkt, und deren Intensität eine ganz ähnliche Function der auf die Stellung von  $m$  bezüglichen Variabeln wie derjenigen ist, welche sich auf die Stellung von  $m'$  beziehen. Ferner wird man die, perpendicular auf  $mo$  und  $m'o'$  geführten Schnitte von  $B$  und  $B'$  constant und gleich  $w$  ansehen und eben so die mittlere Grösse der Molecularzwischenräume als constant betrachten und willkürlich mit  $\varepsilon$  bezeichnen können.

Sei also

$$\varphi(r', x + u, y + v, x + \eta, y + \eta', s, s')$$

die in Rede stehende Function, so wird dieselbe in Bezug auf  $x + u$  und  $x + \eta$ , auf  $y + v$  und  $y + \eta'$ , und auf  $s$  und  $s'$  symmetrisch sein und nur für unmerkliche Werthe der Entfernung  $r'$  ihrerseits merkliche Werthe haben. Da die beiden übereinanderliegenden Fluida verschiedenartiger Natur sind, so wird die Molecularwirkung im Allgemeinen nicht demselben Gesetz folgen, wenn man sie zwischen Punkten betrachtet, die auf der einen oder auf der andern Seite der Trennungsfläche liegen;  $\varphi$  wird also in Bezug auf  $s$  und  $s'$  eine discontinuirliche Function sein, welche drei verschiedene Formen annehmen kann,



jenachdem diese Veränderlichen entweder beide zugleich kleiner, oder beide zugleich grösser, oder die eine kleiner und die andere grösser als  $MO$  sind. Wegen des sehr schnellen Wechsels in dem Grade der Compression nach normaler Richtung wird übrigens die Function  $\varphi$  in gleicher Weise in Bezug auf  $s$  und  $s'$  sich ändern und mithin nicht in einer convergenten Reihe entwickelt werden können, welche nach Potenzen und Producten dieser Grössen geordnet ist, mit Ausnahme derjenigen  $s$  und  $s'$ , welche wegen der Veränderlichkeit der Dicke von  $B$  und  $B'$  eingehen. Da jedoch parallel zur Trennungsfläche die Compression und die Materie jedes Fluidums nur in unmerklichen Abstufungen wechselt, so wird es erlaubt sein, die Function  $\varphi$  nach Potenzen und Producten von  $u, v, \eta, \eta'$  zu entwickeln. Auch wird man für  $r'$  seinen Werth  $r + \frac{\sigma}{r}$  setzen und dann die Entwicklung von  $\varphi$  nach Potenzen von  $\frac{\sigma}{r}$  bewirken können. Zufolge dieser Betrachtungen wird die Function, welche wir der gegenseitigen Einwirkung von  $m$  und  $m'$  bei der Berechnung der Totalwirkung von  $B'$  auf  $B$  substituiren, durch nachstehenden Ausdruck dargestellt sein:

$$U + \frac{\sigma}{r} \frac{dU}{dr} + \frac{u + \eta}{2} \frac{dU}{dx} + \frac{v + \eta}{2} \frac{dU}{dy} + (s + s')P. \quad (3)$$

$U$  und  $P$  bezeichnen hierin Functionen von  $r, x, y, s, s'$ , welche in Bezug auf  $s$  und  $s'$  symmetrisch sind, und unmerklich werden, sobald der Variable  $r$  eine merkliche Grösse erlangt hat. Das letzte Glied  $(s + s')P$  stellt denjenigen Theil dieser Kraft dar, welcher von dem Wechsel in der Dicke von  $B$  und  $B'$  herrührt. Wie in dem vorigen Paragraphen sind die Grössen, welche in Bezug auf  $u, v, \eta, \eta', s, s'$  von der zweiten Ordnung sind, ausser Acht gelassen, das Glied  $\frac{\sigma}{r} \frac{dU}{dr}$  aber beibehalten worden, weil, der Natur der Function  $U$  zufolge, dass Product  $r \frac{dU}{dr}$  mit  $U$  selbst von einerlei Ordnung der Grösse ist.

Diess vorausgesetzt, multiplicire man die Formel (3) mit  $-\cos \alpha, -\cos \beta, -\cos \gamma$ , so wird man die Seitenkräfte der Wirkung von  $m'$  auf  $m$  haben und es werden die Richtungen derselben beziehlich dieselben sein, wie die



der Kräfte  $wT_2$ ,  $wT'_2$ ,  $N_2$ . Bezeichnet man also jene Producte mit  $Q$ ,  $Q'$ ,  $Q''$ , so hat man

$$wT_2 = \Sigma Q, \quad wT'_2 = \Sigma Q', \quad wN_2 = \Sigma Q'',$$

wo die Summenzeichen  $\Sigma$  sich zunächst auf alle Punkte  $m$  und  $m'$  von  $B$  und  $B'$ , dann aber auf alle Stellungen von  $B'$  um  $B$  herum beziehen, während in diesen Summationen der mittlere Molecular-Zwischenraum des Fluidums als constant und als gleich  $\varepsilon$  betrachtet wird. Wir werden jedoch diese Ausdrücke auf einfachere Formen zurückführen.

57. Jede dieser drei Summen wird sich auf die sechs Veränderlichen  $u$ ,  $v$ ,  $\eta$ ,  $\eta'$ ,  $s$ ,  $s'$  beziehen und wird sich erstrecken müssen:

1) auf alle die Paare von Werthen für  $u$  und  $v$ , welche sich auf die materiellen Punkte eines Horizontalschnittes von  $B$  beziehen,

2) auf alle Paare von positiven oder negativen Werthen für  $\eta$  und  $\eta'$ , bis zu  $\pm \infty$ , wenn man will, welche jedoch von den Paaren von Werthen für  $u$  und  $v$  verschieden sind;

3) auf alle Werthe sowohl von  $s$ , als von  $s'$ , welche grösser als Null und kleiner als  $l+l'$  sind, mit Ausschluss jedoch der Grenzwerte Null und  $l+l'$ , welche den Oberflächen von  $A$  entsprechen und welche als zu den unterhalb und oberhalb von  $A$  liegenden Theilen des Fluidums gehörig werden betrachtet werden.

Die Glieder, welche eine ungerade Potenz von  $\eta$  oder von  $\eta'$  zum Factor haben, werden augenscheinlich verschwinden; auch wird man den Punkt  $M$ , den Anfangspunkt der Coordinaten  $u$  und  $v$ , welcher zur unteren Grundfläche von  $B$  gehört, so wählen können, dass dasselbe in Betreff derjenigen Glieder stattfindet, welche mit einer ungeraden Potenz von  $u$  oder von  $v$  multiplicirt sind. Da endlich die beiden Functionen  $U$  und  $P$  in Bezug auf  $s$  und  $s'$  symmetrisch sind, so sieht man, dass auch die Glieder, welche ausserhalb von  $U$  und  $P$  eine ungerade Potenz oder Differenz  $s - s'$  zum Factor haben, sich ebenfalls gegenseitig aufheben müssen. Man wird mithin zunächst

$$T_2 w = \frac{1}{2} \Sigma \frac{u^2 - \eta^2}{r} \frac{dU}{dx},$$

$$T'_2 w = \frac{1}{2} \Sigma \frac{v^2 - \eta'^2}{r} \frac{dU}{dy},$$



$$N_2 w = E \sum \frac{u^2 - \eta^2}{r} U + E' \sum \frac{v^2 - \eta'^2}{r} U$$

haben und nunmehr in den durch  $\Sigma$  angedeuteten Summen auch diejenigen Paare von Werthen für  $\eta$  und  $\eta'$  mit inbegriffen denken können, welche mit denen der Werthe von  $u$  und  $v$  übereinstimmen, indem es einleuchtet, dass die daraus entspringenden Theile dieser Summen sich gegenseitig aufheben werden, und zwar in denjenigen Summationen, welche sich auf  $u$  und  $\eta$  beziehen, wegen des Factors  $u^2 - \eta^2$ , und in denjenigen Summationen, welche sich auf  $v$  und  $\eta'$  beziehen, wegen des Factors  $v^2 - \eta'^2$ . Wir werden mithin die Summenzeichen  $\Sigma$  auf alle Werthe von  $\eta$  und  $\eta'$  ohne Ausnahme erstrecken.

Diess vorausgesetzt, mache ich

$$\eta = u + x', \quad \eta' = v + y', \quad x'^2 + y'^2 = r^2$$

und mithin

$$r^2 = r'^2 + (s - s')^2.$$

Ich gebe sodann den vier Grössen  $x'$ ,  $y'$ ,  $s$ ,  $s'$  bestimmte Werthe und bewirke die Summationen, welche sich auf die beiden andern Variablen  $u$  und  $v$  beziehen. Diejenigen Glieder, welche ungerade Potenzen der letzteren enthalten, werden dann abermals verschwinden, die übrigen Glieder aber müssen mit der Anzahl von Molecülen multiplicirt werden, welche in einem Horizontalabschnitt von  $B$  enthalten sind, und man wird dieselbe zu  $\frac{w}{\varepsilon^2}$  annehmen können, da die Abmessungen von  $w$  im Vergleich zu den Molecular - Zwischenräumen als sehr gross vorausgesetzt worden sind. Unterdrückt man den gemeinschaftlichen Factor  $w$ , so werden die vorhergehenden Formeln übergehen in

$$T_2 = -\frac{1}{2} \sum \frac{x'^2}{r \varepsilon^2} \frac{dU}{dx} = -\frac{1}{2} \frac{d \left[ \sum \frac{x'^2}{r \varepsilon^2} U \right]}{dx},$$

$$T'_2 = -\frac{1}{2} \sum \frac{y'^2}{r \varepsilon^2} \frac{dU}{dy} = -\frac{1}{2} \frac{d \left[ \sum \frac{y'^2}{r \varepsilon^2} U \right]}{dy},$$

$$N_2 = -E \sum \frac{x'^2}{r \varepsilon^2} U - E' \sum \frac{y'^2}{r \varepsilon^2} U.$$



Zu gleicher Zeit hat man

$$\Sigma \frac{x'^2}{r} U = \Sigma \frac{y'^2}{r} U = \frac{1}{2} \Sigma \frac{r'^2}{r} U,$$

$$E + E' = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} \right),$$

wo die beiden Krümmungshalbmesser  $\lambda$  und  $\lambda'$  dieselben Vorzeichen haben wie in den Gleichungen (2). Setzt man also der Abkürzung wegen

$$- \frac{1}{4} \Sigma \frac{r'^2}{r^2} U = h, \quad (4)$$

so hat man endlich

$$T_2 = \frac{dh}{dx}, \quad T'_2 = \frac{dh}{dy}, \quad N_2 = h \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} \right). \quad (5)$$

Die durch  $h$  vorgestellte Summe  $\Sigma$  ist über alle Werthe von  $x'$  und  $y'$ , von  $-\infty$  bis  $+\infty$  zu erstrecken, dagegen nur auf diejenigen Werthe von  $s$  und  $s'$ , welche grösser als Null und kleiner als  $l + l'$  sind. Ihr Werth kann von der Natur der beiden übereinanderliegenden Fluida und dem Grade ihrer Compression abhängen, wird aber von der Krümmung ihrer gemeinschaftlichen Fläche unabhängig sein, weil das Glied  $(s + s')$   $P$  der Formel (3), welches daraus herrührt, aus dem Endresultat verschwunden ist.

58. Nachdem die Werthe der Kräfte  $T_2$ ,  $T'_2$ ,  $N_2$  in dieser Art ermittelt sind, substituire ich dieselben in den Gleichungen (2), welche dadurch in

$$\frac{d(q + q' + h)}{dx} = 0,$$

$$\frac{d(q + q' + h)}{dy} = 0,$$

$$dp - dp' + (q + q' + h) d \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} \right) = 0$$

übergehen. Die beiden ersten Gleichungen zeigen, dass in dem Falle eines Gleichgewichts von zwei übereinanderliegenden Fluiden die Grösse  $q + q' + h$  in der ganzen Ausdehnung ihrer Trennungsfläche constant bleibt. Macht man daher

$$q + q' + h = H,$$



so wird  $H$  eine positive oder negative Constante sein, deren Vorzeichen und Ziffernwerth in jedem besonderen Falle der Erfahrung gegeben sein müssen. Die dritte jener Gleichungen, nemlich

$$dp - dp_1 + H d\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'}\right) = 0 \quad (6)$$

wird die der Trennungsfläche der beiden Fluida sein; man wird darin für  $dp$  und  $dp_1$  ihre Werthe setzen, wie sie aus der Abhängigkeit von denjenigen gegebenen Kräften hervorgehen, welche auf die beiden Fluida wirken, und für die Grösse  $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'}$  den bekannten Ausdruck für dieselbe in einer Function der Coordinaten, bezogen auf irgend beliebige Axen.

Wenn eins der beiden übereinanderliegenden Fluida, z. B. das untere, eine dem atmosphärischen Druck ausgesetzte tropfbare Flüssigkeit ist, so wird man für  $p$ , den barometrischen Druck nehmen. Da nun dieser Druck in der ganzen Oberfläche der Flüssigkeit gleich ist, so hat man  $dp_1 = 0$ , und in Folge der Formel (11) in Nro. 51 wird dann die Gleichung für jene Oberfläche die nachstehende sein:

$$\rho (Xdx + Ydy + Zdz) + H d\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'}\right) = 0. \quad (7)$$

An die Stelle der Coordinaten des Punktes  $M$  kann man darin ohne merklichen Fehler die des Punktes  $O$  setzen, welcher zur Oberfläche der Flüssigkeit selbst gehört. Der mittelst des Barometers gemessene Druck findet ein wenig über dieser Oberfläche statt und zwar an der Grenze der durch die Wirkung der Flüssigkeit comprimierten Luftschicht, welche den Druck des oberen Fluidums auf jene Oberfläche überträgt und überdiess wegen der Grössen  $q$ , und  $h$  auf den Werth von  $H$  Einfluss haben kann.

Bekanntlich ist es der Theil  $H d\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'}\right)$  der Gleichung (7), von welchem die Erscheinungen der Capillarität abhängen. Aus dem höheren oder tieferen Stande der verschiedenen Flüssigkeiten in den Haarröhren lässt sich der Werth von  $H$  ableiten. Für alle Flüssigkeiten, mit denen man Versuche angestellt hat, ist er positiv; er ändert sich mit der Temperatur derselben, scheint aber nicht merklich von dem äusseren Druck abzuhängen. Für den Augenblick verweise ich in Betreff dieses Punktes auf Nro. 31 meiner



Abhandlung über das Gleichgewicht der Fluida, und behalte mir vor, diese Phänomene in einer anderen Abhandlung specieller zu betrachten.

59. Es wird nicht unnütz sein, die vorstehende Analyse zu bestätigen, indem wir die gefundenen Resultate auf den Fall anwenden, wenn die beiden angrenzenden Fluida aus einerlei Materie bestehen und einerlei gegebenen Kräften unterworfen sind, und wo folglich die Compression sich nur in unmerklichen Abstufungen durch die Dicke der von uns mit  $A$  bezeichneten Schicht ändert.

Man wird sodann die in der Formel (4) enthaltene Function  $U$  in einer convergenten Reihe entwickeln können, geordnet nach Potenzen und Producten von  $s$  und  $s'$ , und hiernach

$$U = R + \frac{s + s'}{2} \frac{dR}{dz} + \text{u. s. w.}$$

haben, wo  $R$  dieselbe Function von  $r, x, y, z$ , wie die in den Formeln (4) der Nro. 46 enthaltene ist. Bei dem Grade der Annäherung, bei welchem wir stehen bleiben, wird man bloss das erste Glied dieser Entwicklung beizubehalten und mithin

$$h = - \frac{1}{4\epsilon^2} \sum \frac{r_i^2}{r} R$$

haben, wo  $\epsilon$ , wie in der angezogenen Nro., das mittlere Molecularintervall für den Punkt  $M$  bezeichnet.

Ich theile nun diese Summe  $\Sigma$  in drei Theile, welche dem  $s = s'$ ,  $s' < s$  und  $s' > s$  entsprechen. Die zwei letzteren werden augenscheinlich gleich sein, weil, dem Werth von  $r$  in Nro. 57 zufolge,  $R$  sein Vorzeichen nicht mit dem von  $s' - s$  zugleich wechselt. Jeden dieser zwei letzteren Theile werde ich mit  $S$ , und den ersten mit  $S$ , bezeichnen, so dass man

$$h = - \frac{1}{4\epsilon^2} (2S + S)$$

hat. Für  $s' = s$  ist  $r = r_i$ , und daraus folgt, dass wenn man den Werth, welchen  $R$  in diesem Falle hat, mit  $R_i$  bezeichnet, alsdann die Grösse  $S$ , der Summe  $\sum r_i R_i$  gleich sein wird, letztere über alle Molecülen erstreckt,



welche in einem Horizontalschnitt von  $A$  enthalten sind, und so oft wiederholt, als sich Molecüle in der Höhe  $l + l$ , dieser Schicht des Fluidums vorfinden. Für letztere Zahl wird man  $\frac{1}{\varepsilon} (l + l)$  setzen können, weil  $\frac{w}{\varepsilon^3} (l + l)$  die Zahl der Molecüle ist, welche in einem Verticalfaden von  $A$  vorkommen und  $\frac{w}{\varepsilon^2}$  bereits als die bezügliche Anzahl für einen auf dessen Länge geführten Querschnitt angenommen worden ist. Wenn man daher  $l + l = l'$  setzt, so hat man

$$S = \frac{l'}{\varepsilon} \Sigma r, R,$$

wo  $\Sigma$  nur noch eine doppelte Summe andeutet.

Sei  $z'$  eine positive Grösse, die nicht gleich Null ist, und  $s - s' = z'$ , so ist

$$r^2 = r'^2 + z'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2.$$

Ich gebe nun den  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  bestimmte Werthe, sodann aber den  $s$  und  $s'$  alle diejenigen Werthe, deren Differenz  $z'$  ist. Da nun weder  $s > l'$ , noch  $s' < 0$  sein kann, so leuchtet ein, dass die Zahl der Paare von Werthen von  $s$  und  $s'$  die Anzahl der in der Höhe  $l' - z'$  enthaltenen Molecüle sein wird, und diese Zahl ist gleich  $\frac{l' - z'}{\varepsilon}$ ; der correspondirende Theil von  $S$

wird also das Product aus dieser Zahl und  $\frac{r'^2}{r} R$ , und der Ausdruck für dessen vollständigen Werth mithin

$$S = \Sigma \frac{(l' - z') r'^2}{r \varepsilon} R = \frac{l'}{\varepsilon} \Sigma \frac{r'^2}{r} R - \frac{1}{\varepsilon} \Sigma \frac{z' r'^2}{r} R$$

sein, wo die Zeichen  $\Sigma$  dreifache Summen bedeuten, welche sich über alle positiven und negativen Werthe von  $x'$  und  $y'$ , dagegen nur auf alle positiven Werthe von  $z'$  erstrecken, den Werth  $z' = 0$  jedoch ausgeschlossen.

Es leuchtet ein, dass wenn man die in diesem Ausdruck enthaltene dreifache Summe  $\Sigma \frac{r'^2}{r} R$  mit  $2$  multiplicirt und sie zu der doppelten Summe  $\Sigma r, R$ , in  $S$ , hinzufügt, welche sich ebenfalls über alle positiven und negativen Werthe von  $x'$  und  $y'$  erstreckt, sodann die dreifache Summe  $\Sigma \frac{r'^2}{r} R$  herauskommt, erstreckt über alle positiven, negativen und Null - Werthe von  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , und da alsdann



$$\Sigma \frac{r'^2}{r} R = \frac{2}{3} \Sigma r R$$

ist, so folgt aus der Zusammenstellung der Werthe von  $S$  und  $S'$ , mit den Formeln (4) der Nro. 46, dass der vorhergehende Werth von  $h$  übergeht in

$$h = -p'l' - 2q,$$

wo  $p$  und  $q$  dasselbe bedeuten, wie in den Gleichungen (2).

In Folge der Gleichungen (5) hat man also in dem vorliegenden besonderen Falle

$$T_1 = -2 \frac{dq}{dx} - l' \frac{dp}{dx},$$

$$T_2 = -2 \frac{dq}{dy} - l' \frac{dp}{dy},$$

$$N_2 = -2(2q + l'p) \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} \right).$$

Ich substituire nun diese Ausdrücke in den Gleichungen (1), setze darin zugleich für  $N$ ,  $T$ , u. s. w. ihre Werthe und mache  $X, = X$ ,  $Y, = Y$ ,  $Z, = Z$ ,  $\delta, = \delta$ . Dann kommt

$$\left. \begin{aligned} k \frac{dq}{dx} - \frac{dq}{dx} - l' \frac{dp}{dx} + X l' \delta &= 0 \\ k \frac{dq}{dy} - \frac{dq}{dy} - l' \frac{dp}{dy} + Y l' \delta &= 0 \\ p - kp, + (kq, - q - l'p) \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} \right) + Z l' \delta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

In diesen Gleichungen bedeutet  $k$  den Quotienten, welchen man erhält, wenn man den Flächeninhalt eines durch den Punkt  $M$ , geführten Schnittes des Fadens  $B$  durch den Flächeninhalt eines anderen durch den Punkt  $M$  geführten Schnittes dividirt; beide Schnitte perpendicular zur Axe  $MM$ , gedacht. Nun sind aber diese beiden Schnitte Rectangel und die Verhältnisszahlen der Seiten des ersten zu denen des zweiten sind  $1 - \frac{l'}{\lambda}$  und  $1 - \frac{l'}{\lambda'}$ , die Vorzeichen von  $\lambda$  und  $\lambda'$  ebenso genommen, wie früher. Unter Vernachlässigung des Quadrats von  $l'$  wird daher der Werth von  $k$  sein



$$k = 1 - l' \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} \right).$$

Gleichzeitig hat man

$$p_1 = p + l' \frac{dp}{dx}, \quad q_1 = q + l' \frac{dq}{dy},$$

weil die Punkte  $M$  und  $M_1$  beziehlich den Werthen  $z$  und  $z + l'$ , dagegen einerlei Werthen von  $x$  und  $y$  entsprechen. Uebrigens ist das Product  $ql'$  eine Summe, deren Glieder mit denjenigen von einerlei Ordnung der Grösse sind, welche man mit Rücksicht auf die Zahl ihrer Factoren von unmerklicher Grösse in den vorigen Rechnungen ausser Acht gelassen hat. Es müssen daher in den Gleichungen (8) diejenigen Glieder vernachlässigt werden, welche  $ql'$  oder dessen Partial-Differenzialien zum Factor haben. Ausserdem kann man für  $\delta$  die Dichtigkeit  $\rho$  nehmen, welche im Punkte  $M$  statt hat. Wenn man sodann den allen Gliedern gemeinsamen Factor  $l'$  unterdrückt, so gehen die Gleichungen (8) über in

$$\frac{dp}{dx} = \rho X, \quad \frac{dp}{dy} = \rho Y, \quad \frac{dp}{dz} = \rho Z;$$

d. h. sie ändern sich, wie diess sein muss, in die Gleichungen um, welche sich auf das Gleichgewicht für die Punkte im Innern beziehen.

## §. VII.

*Berechnung der Drucke bei Fluiden, welche in Bewegung sind.*

*Differenzial-Gleichungen für diese Bewegung.*

60. Man denke sich das zu betrachtende Fluidum, für welches zunächst die Moleculardrucke zu berechnen sind, die in seinem Innern und während seiner Bewegung statt haben, in Theile von unmerklicher Grösse zerlegt. Bedeute  $C$  einen dieser Theile, welcher in unmerklicher Entfernung von der Oberfläche des Fluidums liegt. Sei  $M$  der Schwerpunkt von  $C$ . Durch diesen Punkt  $M$  denke man sich eine Fläche gelegt, welche  $C$  in zwei Theile  $A$  und  $A'$  zerlegt, und nun soll versucht werden, denjenigen Druck zu berechnen, welchen  $A'$  auf  $A$  ausübt und dessen nähere Definition aus Nro. 44 ersichtlich ist. Wir setzen zu mehrerer Bestimmtheit fest, dass



die Abmessungen von  $C$  um den Punkt  $M$  herum gross genug seien, so dass  $C$  alle diejenigen Molecüle von  $A$  und  $A'$  enthalte, von welchen der gesuchte Druck abhängt.

Am Ende einer beliebigen Zeit  $t$  seien  $x, y, z$  die drei rechtwinkligen Coordinaten des Punktes  $M$  und  $u, v, w$  dessen drei Seitengeschwindigkeiten nach den Verlängerungen von  $x, y, z$ , so dass wenn  $\tau$  ein unendlich kleines Zeittheilchen bezeichnet, sodann  $u\tau, v\tau, w\tau$  die Ortsverrückungen von  $M$  nach denselben Richtungen sind, welche während dieser Zeit  $\tau$  statt haben. Am Ende derselben Zeit  $t$  seien  $x + x', y + y', z + z'$ , die drei Coordinaten eines anderen Punktes  $M'$  von  $C$ . Wenn es sich um einen festen Körper handelte, so würden die Ortsverrückungen von  $M'$ , die während der Zeit  $\tau$  statt finden, denen von  $M$  untergeordnet sein und würden aus denselben abgeleitet werden, wenn man darin  $x, y, z$  in  $x + x', y + y', z + z'$  verwandelte. Das heisst, sie würden durch  $u'\tau, v'\tau, w'\tau$  ausgedrückt sein, wenn man der Abkürzung wegen

$$\begin{aligned} u' &= u + \frac{du}{dx} x' + \frac{du}{dy} y' + \frac{du}{dz} z', \\ v' &= v + \frac{dv}{dx} x' + \frac{dv}{dy} y' + \frac{dv}{dz} z', \\ w' &= w + \frac{dw}{dx} x' + \frac{dw}{dy} y' + \frac{dw}{dz} z', \end{aligned}$$

setzt und diejenigen Glieder ausser Acht lässt, welche in Bezug auf die Veränderlichen  $x', y', z'$  die erste Ordnung der Grösse übersteigen, da deren Grösse unmerklich ist. Demjenigen zufolge, was am Ende der Nro. 23 gesagt worden ist, würden zu gleicher Zeit die Seitenkräfte, welche aus der Zerlegung des im Punkte  $M$  gegen  $A$  statthabenden und auf die Einheit der Fläche bezogenen Druckes nach den Axen der  $x, y, z$  entstehen, bezüglich um  $\tau Ft, \tau F't, \tau F''t$  vermehrt sein, wenn man

$$\begin{aligned} Ft &= P_1'c'' + P_2c' + P_3c - Kc, \\ F't &= Q_1'c'' + Q_2c' + Q_3c - Kc', \\ F''t &= R_1'c'' + R_2c' + R_3c - Kc'', \end{aligned}$$

macht und die Richtung der die Fläche  $A$  berührenden Ebene als fest voraussetzt.  $c, c', c''$  bedeuten hier die Cosinus der Winkel, welche die innere Normale von  $A$  im Punkte  $M$  mit den Axen der  $x, y, z$  einschliesst. Die Werthe von  $P_1', Q_1',$  u. s. w. sind



$$P'_1 = R'_3 = (K + k) \left( \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} \right),$$

$$Q'_1 = R'_2 = (K + k) \left( \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \right),$$

$$P'_2 = Q'_3 = (K + k) \left( \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right),$$

$$R'_1 = K + 2(K + k) \frac{dw}{dz} - (K - k) \left( \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right),$$

$$Q'_2 = K + 2(K + k) \frac{dv}{dy} - (K - k) \left( \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right),$$

$$P'_3 = K + 2(K + k) \frac{du}{dx} - (K - k) \left( \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right),$$

wo  $K$  und  $k$  dieselben Grössen bedeuten, wie in Nro. 21, nemlich

$$K = \frac{1}{6\varepsilon^3} \Sigma rfr, \quad k = \frac{1}{30\varepsilon^3} \Sigma r^3 \frac{d(\frac{1}{r}fr)}{dr}. \quad (1)$$

Die Summen  $\Sigma$  erstrecken sich über alle Punkte  $M'$  innerhalb der Wirkungssphäre von  $M$ ;  $r$  bedeutet die Entfernung  $MM'$ ,  $fr$  die gegenseitige Wirkung zwischen  $M$  und  $M'$ , und  $\varepsilon$  die mittlere Grösse der Molecularintervallen um  $M$  herum. Bezeichnet man endlich mit  $\chi t$  die Dichtigkeit des Fluidums im Punkte  $M$  am Ende der Zeit  $t$ , so ist, wie man in einer der folgenden Nummern (Nro. 65) sehen wird, identisch

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = - \frac{1}{\chi t} \frac{d\chi t}{dt}, \quad (2)$$

und es geht daraus, wenn man die Werthe von  $P'_1$ ,  $Q'_1$ , u. s. w. in die von  $Ft$ ,  $F't$ ,  $F''t$ , substituirt, folgende Ausdrücke hervor:

$$\left. \begin{aligned} Ft &= c''(K + k) \left( \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} \right) + c'(K + k) \left( \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right) \\ &\quad + 2c(K + k) \frac{dw}{dx} + \frac{c(K - k)}{\chi t} \frac{d\chi t}{dt}, \\ F't &= c''(K + k) \left( \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \right) + c(K + k) \left( \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right) \\ &\quad + 2c'(K + k) \frac{dv}{dy} + \frac{c'(K - k)}{\chi t} \frac{d\chi t}{dt}, \\ F''t &= c'(K + k) \left( \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \right) + c(K + k) \left( \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} \right) \\ &\quad + 2c''(K + k) \frac{dw}{dz} + \frac{c''(K - k)}{\chi t} \frac{d\chi t}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$



Wenn dagegen, nach Maassgabe, wie der Punkt  $M$  sich verrückt, die Molecüle von  $C$  sich immer augenblicklich so ordneten, dass die Contraction des Fluidums nach allen Richtungen um  $M$  herum gleich wäre, so würden die Seitenkräfte des Drucks während der Bewegung des Fluidums dieselben sein, wie wir sie in dem fünften Paragraphen für den Fall des Gleichgewichts bestimmt haben. Um die Frage zu vereinfachen, wollen wir von demjenigen Theil der Kraft abstrahiren, welcher von der Krümmung von  $A$  und von dem Wechsel, sowohl der Materie als der Contraction des Fluidums im Bereiche der Wirkungssphäre von  $M$  abhängt, weil dieser Theil nur bei der Betrachtung der freien Oberfläche von Wichtigkeit ist, mit welcher wir uns jetzt nicht beschäftigen. Der Druck, um welchen es sich jetzt handelt, wird sich alsdann auf die Kraft  $p$  der Nro. 46 reduciren, welcher normal auf  $A$  von aussen nach innen gerichtet und der vorigen Grösse  $K$  gleich ist, insofern die Kraft  $R$  der Nro. 43 nicht von  $fr$  verschieden sein wird. Wenn man daher für irgend einen beliebigen Zeitpunkt

$$p = \frac{1}{6\epsilon^3} \Sigma rfr = \psi t$$

setzt, so werden  $c\psi t$ ,  $c'\psi t$ ,  $c''\psi t$  die Seitenkräfte dieses Drucks nach den Richtungen der  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , und  $c\tau\psi't$ ,  $c'\tau\psi't$ ,  $c''\tau\psi't$  deren Zuwachse während des Zeitraums  $\tau$  sein, unter  $\psi't$  den Differenzial-Coefficienten  $\frac{d\psi t}{dt}$  verstanden.

In den beiden Extremfällen also, nemlich dem der Festigkeit und dem einer augenblicklichen Flüssigkeit, würden die Zuwachse der Seitenkräfte des Drucks während des unendlich kleinen Zeitraums  $\tau$  ausgedrückt sein durch

$$\tau F't, \quad \tau F'lt, \quad \tau F''lt$$

für die erste Hypothese, und durch

$$\tau c\psi't, \quad \tau c'\psi't, \quad \tau c''\psi't$$

für die zweite. Da aber keiner von diesen Fällen wirklich statt hat, so muss ermittelt werden, wie diese Zuwachse und mithin auch die Seitenkräfte des Drucks selbst in dem Zustande der Bewegung ausfallen werden, wenn das Fluidum erst nach dem Verlauf einer, wenn auch noch so kleinen, doch *endlichen* Zeit, zu dem Zustande einer nach allen Richtungen gleichen Contraction gelangt, in welcher seine Fundamental-Eigenschaft besteht.



61. Zu dem Ende wollen wir die Zeit von dem Anfang der Bewegung an zählen, so dass für  $t=0$  die Linearcontraction von  $C$  und der Druck nach allen Richtungen um den Punkt  $M$  herum dieselben sind. Die Seitenkräfte dieses Anfangsdrucks nach den Richtungen der  $x, y, z$  werden  $c\psi_0, c'\psi_0, c''\psi_0$  sein. Die Werthe von  $u, v, w, u', v', w'$ , für denselben Zeitpunkt mögen mit  $u_0, v_0, w_0, u'_0, v'_0, w'_0$  bezeichnet sein. Nehmen wir an, dass der Punkt  $M$ , nachdem er den Ortsverrückungen  $\tau u_0, \tau v_0, \tau w_0$  unterworfen gewesen ist, plötzlich still stehe. In dem ersten Augenblick wird sich das Fluidum nach den verschiedenen Richtungen um  $M$  herum ungleichmässig zusammenziehen oder ausdehnen; die correspondirenden Ortsverrückungen irgend eines beliebigen Punktes  $M'$  von  $C$  werden  $\tau u'_0, \tau v'_0, \tau w'_0$  sein, und die Zuwachse der Seitenkräfte des Drucks  $\tau F_0, \tau F'_0, \tau F''_0$ . Aber sehr bald wird das Fluidum zu einem stabilen Zustand gelangen, in welchem die relativen Ortsveränderungen von  $M$  nicht mehr  $\tau(u'_0 - u_0), \tau(v'_0 - v_0), \tau(w'_0 - w_0)$  sein werden. Ihre Grösse wird unbekannt sein; aber sie wird von der Art sein, dass die Linearcontraction und mithin auch der Druck nach allen Richtungen um  $M$  herum gleich sein wird. Zu diesem Zeitpunkt werden die Zuwachse der Seitenkräfte des Drucks diese geworden sein:  $\tau c\psi'_0, \tau c'\psi'_0, \tau c''\psi'_0$ . Die Differenzen zwischen ihren ersten und ihren letzteren Werthen, nemlich  $\tau F_0 - \tau c\psi'_0, \tau F'_0 - \tau c'\psi'_0, \tau F''_0 - \tau c''\psi'_0$ , werden gänzlich verschwinden und am Ende einer beliebigen Zeit  $t$  wird man diese Zuwachse durch

$$\tau c\psi'_0 + (F_0 - c\psi'_0)\tau\varphi t,$$

$$\tau c'\psi'_0 + (F'_0 - c'\psi'_0)\tau\varphi t,$$

$$\tau c''\psi'_0 + (F''_0 - c''\psi'_0)\tau\varphi t$$

darstellen können, unter  $\varphi t$  eine Function verstanden, welche für  $t=0$  der Einheit gleich ist, sich sehr schnell ändert und dabei Null oder unmerklich wird, sobald  $t$  einen gewissen zwar sehr kleinen aber endlichen Ziffernwerth, oder noch grössere Ziffernwerthe, als den zuletzt bezeichneten annimmt. Diese Function hängt von der Natur des Fluidums ab, woraus  $C$  gebildet ist, und man nimmt an, dass sie für die drei Seitenkräfte eine und dieselbe sei, weil in einem Fluidum um jeden Punkt herum Alles nach allen Richtungen hin ähnlich ist.



Bezeichnen wir mit  $u, v, w$ , die Werthe von  $u, v, w$ , welche der Zeit  $t = \tau$  entsprechen. Setzen wir voraus, dass der Punkt  $M$  zu diesem Zeitpunkt und während eines zweiten Zeitraums, der dem ersten gleich ist, neue Ortsverrückungen  $\tau u, \tau v, \tau w$ , parallel zu den Axen der  $x, y, z$  erleide und sodann wiederum plötzlich stillstehe. Man wird dann, wie früher, erkennen, dass die Zuwachse zu den Seitenkräften des Drucks, welche in Folge dieser zweiten Ortsverrückungen statt haben, am Ende einer Zeit  $t$ , d. h. in demselben Augenblick wie die ersten Zuwachse, ausgedrückt sein werden durch:

$$\tau c \psi' \tau + (F \tau - c \psi' \tau) \tau \varphi(t - \tau),$$

$$\tau c' \psi' \tau + (F' \tau - c' \psi' \tau) \tau \varphi(t - \tau),$$

$$\tau c'' \psi' \tau + (F'' \tau - c'' \psi' \tau) \tau \varphi(t - \tau).$$

Allgemein, wenn  $n$  eine beliebige ganze Zahl bedeutet und  $u_n, v_n, w_n$  die Werthe von  $u, v, w$  sind, welche der Zeit  $t = n\tau$  entsprechen, so werden die Zuwachse der Seitenkräfte des Drucks, welche von den Ortsverrückungen  $\tau u_n, \tau v_n, \tau w_n$  des Punktes  $M$  während des  $n$ ten Zeitintervalls  $\tau$  herrühren, ausgedrückt sein durch:

$$\left. \begin{aligned} \tau c \psi' n\tau + (F n\tau - c \psi' n\tau) \tau \varphi(t - n\tau), \\ \tau c' \psi' n\tau + (F' n\tau - c' \psi' n\tau) \tau \varphi(t - n\tau), \\ \tau c'' \psi' n\tau + (F'' n\tau - c'' \psi' n\tau) \tau \varphi(t - n\tau), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

und zwar am Ende einer beliebigen seit dem Anfange der Bewegung verflossenen Zeit  $t$ .

Man denke sich nun die Zeit  $t$  in eine Anzahl  $m$  unendlich kleiner Zeittheilchen getheilt, deren jeder gleich  $\tau$  sei. Von dem Zeitpunkt für  $t = 0$ , bis zum dem Zeitpunkt für  $t = (m - 1)\tau$  wird der Punkt  $M$  während der Bewegung des Fluidums nach und nach eine Anzahl  $m$  von Verrückungen erleiden, ähnlich denen, welche wir soeben betrachtet haben. Die correspondirenden Bewegungen aller Molecüle von  $C$  werden sich aber ohne gegenseitige Beeinträchtigung dergestalt combiniren, dass zu irgend einem beliebigen Zeitpunkt der Werth von jeder der Coordinaten eines beliebigen Punktes  $M'$  die Summe derjenigen Werthe ist, welche sie zu demselben Zeitpunkte in Folge der successiven Ortsveränderungen von  $M$  gehabt haben



würden, wenn man letztere abgesondert von einander betrachtet hätte. Folglich werden auch die Zuwachse der Seitenkräfte des Drucks die Summen aller partiellen Zuwachse sein, wie sie durch die Formeln (4) dargestellt sind. Bezeichnet man also die zu bestimmenden Seitenkräfte des Drucks am Ende der Zeit  $t$  und nach den Richtungen der  $x, y, z$  beziehlich durch  $U, V, W$ , und beachtet man, dass für  $t=0$  diese Kräfte durch  $c\psi_0, c'\psi_0, c''\psi_0$  ausgedrückt sind, so haben wir

$$U = c\psi_0 + c \sum \tau \psi' n \tau + \sum (F n \tau - c \psi' n \tau) \tau \varphi (t - n \tau),$$

$$V = c'\psi_0 + c' \sum \tau \psi' n \tau + \sum (F' n \tau - c' \psi' n \tau) \tau \varphi (t - n \tau),$$

$$W = c''\psi_0 + c'' \sum \tau \psi' n \tau + \sum (F'' n \tau - c'' \psi' n \tau) \tau \varphi (t - n \tau),$$

wo die Summen  $\Sigma$  sich von  $n=0$  bis  $n=m-1$ , oder, ohne merklichen Fehler, bis zu  $n=m$  erstrecken.

Da  $\tau$  unendlich klein und  $\psi' t = \frac{d\psi}{dt}$  ist, so hat man

$$\psi_0 + \sum \tau \psi' n \tau = \psi t = p.$$

Die übrigen Summen  $\Sigma$  verwandeln sich in bestimmte Integrale, und wenn man  $n\tau = \theta$ , und  $\tau = d\theta$  setzt, so erhält man

$$\left. \begin{aligned} U &= cp - c \int_0^t \varphi(t-\theta) d\psi\theta + \int_0^t \varphi(t-\theta) F\theta d\theta, \\ V &= c'p - c' \int_0^t \varphi(t-\theta) d\psi\theta + \int_0^t \varphi(t-\theta) F'\theta d\theta, \\ W &= c''p - c'' \int_0^t \varphi(t-\theta) d\psi\theta + \int_0^t \varphi(t-\theta) F''\theta d\theta. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Diess sind die Ausdrücke für die drei Seitenkräfte des auf die Einheit der Fläche bezogenen Drucks, welcher zu irgend einem Zeitpunkt im Innern des in Bewegung begriffenen Fluidums auf einen Theil  $A$  desselben und in einem Punkte  $M$  ausgeübt wird, dessen innere Normale mit den Richtungen dieser Kräfte  $U, V, W$  Winkel bildet, deren Cosinus  $c, c', c''$  sind.

*In Folge der letzten Glieder dieser Ausdrücke fällt die Mittelkraft nicht mit der genannten Normale zusammen und ist auch nicht nach allen Richtungen um  $M$  herum gleich, wie im Fall des Gleichgewichts.*



62. Setzen wir  $t - \theta = t'$ ,  $d\theta = -dt'$ , so haben wir

$$\int \varphi(t - \theta) d\psi\theta = \int \varphi t' \frac{d\psi(t - t')}{dt} dt'.$$

Sei ferner

$$\int \varphi t' dt' = \varphi_1 t', \quad \int \varphi_1 t' dt' = \varphi_2 t', \quad \int \varphi_2 t' dt' = \varphi_3 t', \text{ u. s. w.};$$

diese successiven Integrale so genommen, dass sie sämmtlich für denjenigen sehr kleinen Werth von  $t'$  verschwinden, welcher  $\varphi t'$  unmerklich oder Null macht. Nimmt man an,  $t$  überschreite diesen Werth, so hat man durch theilweise Integration

$$\int \varphi t' \frac{d\psi(t - t')}{dt} dt' = -\varphi_1 0 \frac{d\psi t}{dt} - \varphi_2 0 \frac{d^2 \psi t}{dt^2} - \varphi_3 0 \frac{d^3 \psi t}{dt^3} - \text{u. s. w.},$$

und diese Reihe wird um desto convergenter sein, je schneller die Function  $\varphi t$  sich im Vergleich zur Function  $\psi t$  ändert. Im Allgemeinen kann man annehmen, dass die Veränderung der ersteren Function im Verhältniss zu der zweiten ausserordentlich schnell vor sich geht, und man kann daher die vorhergehende Reihe auf ihr erstes Glied reduciren. Nun hat man

$$-\varphi_1 0 = \int \varphi t' dt',$$

und kann, wegen des für  $t$  vorausgesetzten Werthes, dieses Integral bis ins Unendliche erstrecken. Macht man sodann

$$\int \varphi t' dt' = \alpha,$$

so geht daraus

$$\int \varphi(t - \theta) d\psi t = \alpha \frac{d\psi t}{dt}$$

hervor. Nimmt man ferner an, dass die durch die Gleichungen (3) gegebenen Functionen  $Ft$ ,  $F't$ ,  $F''t$ , welche von den Geschwindigkeiten der Molecüle des Fluidums abhängen, im Vergleich zu  $\varphi t$  sich ebenfalls nur sehr langsam ändern, so folgt daraus



$$\int_0^t \varphi(t-\theta) F\theta \, d\theta = \alpha Ft,$$

$$\int_0^t \varphi(t-\theta) F'\theta \, d\theta = \alpha F't,$$

$$\int_0^t \varphi(t-\theta) F''\theta \, d\theta = \alpha F''t,$$

und die Gleichungen (3) gehn über in

$$\left. \begin{aligned} U &= c \left( p - \alpha \frac{d\psi t}{dt} \right) + \alpha Ft, \\ V &= c' \left( p - \alpha \frac{d\psi t}{dt} \right) + \alpha F't, \\ W &= c'' \left( p - \alpha \frac{d\psi t}{dt} \right) + \alpha F''t. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Diese Formeln sind um Vieles einfacher, als diejenigen, aus denen sie abgeleitet sind. Sie gelten nicht für die ersten Augenblicke, wo das Fluidum in Bewegung gesetzt ist, sondern erst nach Verlauf einer Zeit  $t$ , für welche die Function  $\varphi t$  keinen merklichen Werth mehr giebt und welche man in den zusammendrückbaren und unzusammendrückbaren Fluiden von vollkommener Fluidität als ausserordentlich klein annehmen kann. Auch sind sie nicht mehr gültig, wenn die Molecüle des Fluidums Vibrationen machen, welche so schnell sind, dass ihre Zeitdauer jenem Zeitraum vergleichbar wird, und wenn mithin die Functionen  $\psi t$ ,  $Ft$ ,  $F't$ ,  $F''t$  eben so schnell wechseln als  $\varphi t$ . Diess kann Beispielsweise bei den Schwingungen des Aethers vorkommen, welche die Lichtwellen hervorbringen. Um die Bewegung von diesen zu berechnen und daraus unter Zugrundelegung dieses Systems die Lichtphänomene zu folgern, wird man also genöthigt sein, die Gleichungen (5) anzuwenden. Wenn der Aether in den Poren cristallisirter Körper eingeschlossen ist, so wird es möglich sein, dass die Anordnung ihrer Molecüle auf die Function  $\varphi t$  Einfluss äussert, und dann wird es der grösseren Allgemeinheit wegen angemessen sein, an die Stelle dieser Grösse eine andere Function zu setzen, welche von der Richtung der Bewegung abhängt und nicht für jede der drei Gleichungen (5) eine und dieselbe ist. Wir werden



von diesen, solchergestalt verallgemeinerten, Gleichungen Gebrauch machen, wenn wir uns speciell mit der Theorie des Lichtes beschäftigen werden. In der vorliegenden Abhandlung werden wir die Gleichungen (6) anwenden, welche für alle anderen Fälle der Bewegung von Fluiden genügen werden.

Der Coefficient  $\alpha$ , welcher darin vorkommt, wird von der Materie des Fluidums und der Wärmemenge seiner Molecüle abhängig sein, und wenn er bei den Gasen einen merklichen Werth hat, welcher allein aus der Erfahrung erkannt werden kann, so wird sich dieser Werth auch mit dem Grade der Compression ändern, welcher in jedem Augenblick um  $M$  herum statt hat. Bei einer homogenen tropfbaren Flüssigkeit von durchweg gleicher Temperatur wird dieser Coefficient eine Constante sein, deren Ziffernwerth und Vorzeichen für jede Flüssigkeit insbesondere gegeben sein müssen.

Das durch  $\alpha$  dargestellte Integral  $\int_0^\infty \varphi t' dt'$  bezeichnet einen gewissen Zeitraum, und obgleich man  $\varphi t' = 1$  für  $t' = 0$  hat, und obgleich  $\varphi t'$  nur für einen beinahe unmerklichen Umfang der Werthe von  $t'$  seinerseits merkliche Werthe hat, so folgt daraus doch keinesweges, dass die Zeit  $\alpha$  ebenfalls beinahe unmerklich sein müsse. Man wird sich, wie in Nro. 7, leicht überzeugen, dass ihr Werth im Vergleich zu dem Umfange der Werthe von  $t'$  ausserordentlich gross sein könne, wenn  $\varphi t'$  die Differenz zweier Functionen ist, von denen die eine aus der anziehenden Kraft der Molecüle, und die andere aus der abstossenden Kraft des Wärmestoffs entspringt.

63. Ich nehme nun an, dass der Theil  $A$  des Fluidums, für welchen wir so eben den auf ihn wirkenden Druck nach Grösse und Richtung bestimmt haben, durch eine Ebene begrenzt sei, und ich lasse sodann die durch den Punkt  $M$  geführte innere Normale successive mit einer jeden von drei parallelen Linien zu den Axen der  $x$ ,  $y$ ,  $z$  zusammenfallen. Ich bezeichne die Werthe von  $U$ ,  $V$ ,  $W$ , mit  $U_1$ ,  $V_1$ ,  $W_1$ , wenn jene Ebene zu der der  $x$ ,  $y$  parallel ist; mit  $U_2$ ,  $V_2$ ,  $W_2$ , wenn sie der Ebene der  $x$ ,  $z$  parallel ist; und mit  $U_3$ ,  $V_3$ ,  $W_3$ , wenn sie der Ebene der  $y$ ,  $z$  parallel ist. Im ersten Falle hat man  $c = 0$ ,  $c' = 0$ ,  $c'' = 1$ ; im zweiten  $c = 0$ ,  $c' = 1$ ,  $c'' = 0$ ; und im dritten  $c = 1$ ,  $c' = 0$ ,  $c'' = 0$ . Hieraus und mittelst der Gleichungen (2) und (3) wird dann folgen:



$$\begin{aligned}
 U_1 &= W_3 = \beta \left( \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} \right), \\
 V_1 &= W_2 = \beta \left( \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \right), \\
 U_2 &= V_3 = \beta \left( \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right), \\
 W_1 &= p - \alpha \frac{d\psi t}{dt} - \frac{\beta'}{\chi t} \frac{d\chi t}{dt} + 2\beta \frac{dw}{dz}, \\
 V_2 &= p - \alpha \frac{d\psi t}{dt} - \frac{\beta'}{\chi t} \frac{d\chi t}{dt} + 2\beta \frac{dv}{dy}, \\
 U_3 &= p - \alpha \frac{d\psi t}{dt} - \frac{\beta'}{\chi t} \frac{d\chi t}{dt} + 2\beta \frac{du}{dx},
 \end{aligned} \tag{7}$$

wo der Abkürzung wegen

$$(k + K) \alpha = \beta, \quad (k - K) \alpha = \beta',$$

gesetzt worden und ausserdem  $p = \psi t = K$  ist. Diese neun Seitenkräfte reduciren sich, wie man sieht, auf sechs wirklich verschiedene Kräfte, gemäss der Bemerkung der Nro. 38.

Wenn es sich um eine tropfbare Flüssigkeit handelt, die unter sehr grossen Drucken dennoch nur sehr wenig sich zusammendrücken lässt, so kann  $K$  in Bezug auf  $k$  vernachlässigt werden und es werden dann die beiden Coefficienten  $\beta$  und  $\beta'$  gleich. Denn es seien  $\varepsilon'$  und  $K'$  die Werthe von  $\varepsilon$  und  $K$ , welche im Punkte  $M$  in dem natürlichen Zustande des Körpers stattfinden, d. h., wenn er keiner fremden Kraft unterworfen ist und wenn die Molecularwirkungen sowohl an der Oberfläche als im Innern einander im Gleichgewichte halten. Wir werden sodann

$$\varepsilon' = \varepsilon (1 - \delta)$$

haben, wo  $\delta$  ein sehr kleiner positiver oder negativer Bruch ist. Setzen wir auch voraus, dass in diesem Zustande des Fluidums die Wärmemenge seiner Molecüle und mithin auch die gegenseitige Wirkung derselben in gegebener Entfernung dieselben seien, wie in dem von uns betrachteten Zustande der Bewegung. Dann wird die Grösse  $K'$  sich aus der von  $K$  ableiten lassen, wenn man darin  $\varepsilon'$  an die Stelle von  $\varepsilon$  und  $r(1 - \delta)$  an die Stelle von  $r$  setzt,



als der Entfernung zwischen zwei benachbarten Molecülen. Vernachlässigt man sodann das Quadrat von  $\delta$ , so hat man

$$K' = K + K\delta - \frac{\delta}{6\varepsilon^3} \sum r^3 \frac{d(\frac{1}{r}fr)}{r} = K + K\delta - 5k\delta,$$

in Folge der Gleichungen (1). Die Bedingung für den natürlichen Zustand eines flüssigen oder festen Körpers ist aber  $K' = 0$ , nach Nro. 17. Man hat also

$$k = -\frac{K}{5\delta} + \frac{K}{5},$$

welches zeigt, dass  $k$  ein sehr grosses Vielfaches von  $K$  ist. Wenn die Flüssigkeit homogen ist und durchweg von gleicher Temperatur, so sind die Grössen  $\alpha$  und  $k$  constant und

$$\beta = \beta' = \alpha k.$$

In dem Falle eines homogenen *luftförmigen* Fluidums, dessen Temperatur in seinem natürlichen Zustande überall dieselbe ist, können die drei *Coefficienten*  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\beta'$  während der *Bewegung* und gleichzeitig mit dem Grade der in jedem Punkte des Fluidums stattfindenden *Compression sich ändern*. Wenn aber die Ausdehnungen und Contraction des Fluidums, die Unterschiede im Druck und die Geschwindigkeiten der Molecüle klein genug sind, so dass man diejenigen Grössen vernachlässigen darf, welche in Bezug auf jene Variabeln von der zweiten Ordnung sind, so wird es erlaubt sein, die Grössen  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\beta'$  in den Formeln (7) als Constanten zu betrachten, welche unter sich durch die Gleichung

$$2p\alpha = \beta - \beta'$$

verbunden sind.

64. Nun wird es leicht sein, die Differenzial-Gleichungen zu bilden, welche sich auf die Bewegung im Innern irgend eines Fluidums beziehen. Bezeichnet man mit  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  die zu den Axen der  $x$ ,  $y$ ,  $z$  parallelen Seitenkräfte der gegebenen und auf die Einheit der Masse bezogenen Kraft, welche auf den materiellen Punkt  $M$  wirkt, so wird es genügen, dem allgemeinen Prinzip der Dynamik gemäss in den Gleichungen der Nro. 12,



$X = \frac{d^2x}{dt^2}$ ,  $Y = \frac{d^2y}{dt^2}$ ,  $Z = \frac{d^2z}{dt^2}$  an die Stelle von  $X, Y, Z$ , und die vorhin berechneten Werthe von  $U_1, V_1$ , u. s. w. an die Stelle von  $P_1, Q_1$ , u. s. w. zu setzen. Auf diese Weise hat man

$$\left. \begin{aligned} \rho \left( X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) &= \frac{dU_1}{dz} + \frac{dU_2}{dy} + \frac{dU_3}{dx}, \\ \rho \left( Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) &= \frac{dV_1}{dz} + \frac{dV_2}{dy} + \frac{dV_3}{dx}, \\ \rho \left( Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) &= \frac{dW_1}{dz} + \frac{dW_2}{dy} + \frac{dW_3}{dx}, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

wo  $\rho$  die Dichtigkeit im Punkte  $M$  bedeutet, welche vorhin von uns mit  $\chi t$  bezeichnet worden ist.

Hierbei ist zu beachten, dass  $\frac{d^2x}{dt^2}$ ,  $\frac{d^2y}{dt^2}$ ,  $\frac{d^2z}{dt^2}$  die Differenzialquotienten der Geschwindigkeiten  $u, v, w$  in Bezug auf  $t$  und in Bezug auf die Coordinaten  $x, y, z$  des Punktes  $M$  sind, welche ihrerseits selbst Functionen von  $t$  sind, so dass

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w$$

und

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{du}{dt} + u \frac{du}{dx} + v \frac{du}{dy} + w \frac{du}{dz},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv}{dt} + u \frac{dv}{dx} + v \frac{dv}{dy} + w \frac{dv}{dz},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dw}{dt} + u \frac{dw}{dx} + v \frac{dw}{dy} + w \frac{dw}{dz}$$

ist, welche letzteren Werthe nunmehr in den Gleichungen (8) substituirt werden müssen. Wegen  $\phi t = p$  und  $\chi t = \rho$  hat man aus demselben Grunde

$$\frac{d\phi t}{dt} = \frac{dp}{dt} + u \frac{dp}{dx} + v \frac{dp}{dy} + w \frac{dp}{dz},$$

$$\frac{d\chi t}{dt} = \frac{d\rho}{dt} + u \frac{d\rho}{dx} + v \frac{d\rho}{dy} + w \frac{d\rho}{dz},$$



für die in den Ausdrücken von  $U_1$ ,  $V_1$ , u. s. w. enthaltenen Differenzial-Quotienten von  $\psi t$  und  $\chi t$ , in Bezug auf die Zeit und Alles, was davon abhängt.

Die Gleichungen (8) werden für alle Fluida, homogene wie heterogene, gültig sein, in welchen die Temperatur und die Compression in irgend einer Weise, sei es im Verlauf der Zeit, sei es von einem Punkte zum andern wechseln.

Der einfachste und bei der Bewegung tropfbarer oder elastischer Fluida gewöhnlich betrachtete Fall ist der der Homogenität, gleicher Temperatur und sehr geringer Aenderung in der Dichtigkeit, d. h. der Fall, wo man dem vorhin Gesagten zufolge  $\beta$  als eine constante Grösse betrachten kann. Wenn man sodann die Substitution der Werthe von  $U_1$ ,  $V_1$ , u. s. w. bewirkt, die Gleichungen (2) beachtet und der Abkürzung wegen

setzt, so ergeben die Gleichungen (8)

$$\left. \begin{aligned} \rho \left( X - \frac{d^2 x}{dt^2} \right) &= \frac{d\pi}{dx} + \beta \left( \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} \right), \\ \rho \left( Y - \frac{d^2 y}{dt^2} \right) &= \frac{d\pi}{dy} + \beta \left( \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dz^2} \right), \\ \rho \left( Z - \frac{d^2 z}{dt^2} \right) &= \frac{d\pi}{dz} + \beta \left( \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d^2 w}{dy^2} + \frac{d^2 w}{dz^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Ferner hat man, wie wir oben gesehen haben, für den Fall einer tropfbaren Flüssigkeit, sehr nahe  $K = 5k\delta$ , und demnächst ist  $\chi t = D(1 - 3\delta)$ , wenn  $D$  die Dichtigkeit der Flüssigkeit in ihrem natürlichen Zustande ist; und da  $K = \psi t$ , und  $\beta + \beta' = 2\alpha k$ , so wird daraus

$$\frac{\beta + \beta'}{\chi t} \frac{d\chi t}{dt} = - \frac{6\alpha}{5} \frac{d\psi t}{dt}$$

folgen, wodurch sich der Werth von  $\pi$  auf

$$\pi = p + \frac{\alpha}{5} \frac{d\psi t}{dt}$$

reducirt. In dem Falle eines luftförmigen Fluidums ist, wie man bald sehen wird, (Nro. 67),



unter  $\gamma$  das Verhältniss der specifischen Wärme bei constantem Druck zur specifischen Wärme bei constantem Volumen verstanden. Macht man nun

$$\alpha + (\beta + \beta') \frac{\gamma}{p} = \gamma',$$
so wird man daher

$$\pi = p - \gamma' \frac{d\psi t}{dt}$$

haben und in dieser Formel  $\gamma'$  als eine constante Grösse betrachten können. In diesen beiden Fällen werden daher die Gleichungen (9) nur zwei Coefficienten enthalten, nemlich  $\alpha$  und  $\beta$ , oder  $\gamma'$  und  $\beta$ , und diese werden von der Materie und der Temperatur des Fluidums abhängen.

Ausser den Geschwindigkeiten  $u, v, w$  werden die drei Gleichungen (8) oder (9) noch zwei Unbekannte  $\rho$  und  $p$  enthalten und es werden deshalb noch zwei neue Gleichungen nöthig sein, diejenigen noch nicht mitgerechnet, welche sich auf die Mittheilung der Wärme in dem Falle bezieht, wo die Temperatur von einem Punkte zum andern wechselt. Mit diesen anderen Gleichungen wollen wir uns nun beschäftigen.

65. Betrachten wir einen Theil des Fluidums, welcher eine nur unmerkliche Grösse habe, nichtsdestoweniger aber eine ausserordentlich grosse Anzahl von solchen Theilen wie  $C$  in sich begreift. Sei  $C$ , einer dieser Theile, verschieden von  $C$ , und sein Schwerpunkt sei  $M$ . Bezeichnet man für den Augenblick, wo die Zeit  $t$  abgelaufen ist, durch  $u, v, w$ , die den Axen der  $x, y, z$  parallelen Seitenkräfte der Geschwindigkeit von  $M$ , und durch  $x + x, y + y, z + z$ , die Coordinaten dieses Punktes, bezogen auf dieselben Axen, so leuchtet ein, dass  $u, v, w$ , aus  $u, v, w$  werden abgeleitet werden können, wenn man darin  $x, y, z$  und  $x, y, z$ , wachsen lässt. Behalten wir daher nur die Glieder bei, welche in Bezug auf  $x, y, z$ , von der ersten Ordnung sind, so werden wir haben

$$u, = u + x \frac{du}{dx} + y \frac{du}{dy} + z \frac{du}{dz},$$

$$v, = v + x \frac{dv}{dx} + y \frac{dv}{dy} + z \frac{dv}{dz},$$



$$w, = w + x, \frac{dw}{dx} + y, \frac{dw}{dy} + z, \frac{dw}{dz},$$

und es werden die Coordinaten von  $M,$ , bezogen auf  $M$  als Anfangspunkt, während des Zeitraums  $dt$  sich um  $(u, -u)dt$ ,  $(v, -v)dt$ ,  $(w, -w)dt$  vermehren. Bezeichnen wir mit  $V$  das Volumen des von uns betrachteten Theiles des Fluidums und sei die Form desselben die eines Parallelepipedums, dessen drei beieinanderliegende Flächen den Coordinaten-Ebenen parallel seien. Wie in Nro. 19 wird man nun nachweisen können, dass sich diess Parallelepiped während des Zeitraums  $dt$  in ein schiefwinkliges Parallelepiped verwandelt, und dass, wenn man dessen Volumen am Ende der Zeit  $t + dt$  mit  $V + V' dt$  bezeichnet,

$$V' = V \left( \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right)$$

ist. Die Dichtigkeit des in Rede stehenden Theils der Flüssigkeit ist  $\rho$  am Ende der Zeit  $t$ ; bezeichnet man ihren Werth am Ende der Zeit  $t + dt$  mit  $\rho + \rho' dt$ , so wird der Zuwachs der Masse während des Zeitraums  $dt$  durch  $\rho V' dt + \rho' V dt$  dargestellt sein, und da die Masse sich nicht verändern kann, so muss

$$\rho' + \frac{V'}{V} \rho = 0$$

sein, woraus zunächst, wenn man für  $V'$  seinen vorhergehenden Werth setzt und sodann beachtet, dass  $\rho = \chi t$ ,  $\rho' = \frac{d\chi t}{dt}$  ist, die Gleichung (2) in Nro. 60 folgt. Betrachtet man  $\rho$  als Function von  $x, y, z$  und  $t$ , so hat man ausserdem

$$\rho' = \frac{d\rho}{dt} + u \frac{d\rho}{dx} + v \frac{d\rho}{dy} + w \frac{d\rho}{dz},$$

und aus der Benutzung dieses Werthes und des von  $V'$  folgt zuletzt

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{d(\rho u)}{dx} + \frac{d(\rho v)}{dy} + \frac{d(\rho w)}{dz} = 0. \quad (10)$$

Diess ist eine der gesuchten Gleichungen und zwar gilt dieselbe für jedes in Bewegung begriffene Fluidum von ganz beliebiger Art.

Wenn es sich um ein unzusammendrückbares Fluidum handelt, dessen Temperatur zugleich überall gleich ist, so wird man die Zunahme des



Volumens, nemlich  $V'dt$  als Null betrachten müssen. Dann aber zerlegt sich die vorige Gleichung in zwei andere, nemlich in:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} &= 0 \\ \frac{d\rho}{dt} + u \frac{d\rho}{dx} + v \frac{d\rho}{dy} + w \frac{d\rho}{dz} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

und diese werden in Verbindung mit den Gleichungen (8) dieselbe Anzahl von Gleichungen, ergeben als Unbekannte vorhanden sind, nemlich  $u, v, w, \rho$  und  $p$ . Jenachdem das Fluidum homogen oder heterogen ist, wird die Dichtigkeit  $\rho$  constant oder eine gegebene Function der Anfangs-Coordinationen des beliebigen Punktes  $M$  sein; da aber  $x, y, z$  unbekannte Functionen dieser Coordinationen und der Zeit  $t$  sind, so ist in dem zweiten Falle  $\rho$  auch unbekannt, wenn man es als Function von  $x, y, z$  und  $t$  betrachtet. Der auf den Zustand des Gleichgewichts bezügliche Druck, oder die Grösse  $\frac{1}{6\varepsilon^3} \Sigma rfr$ , welcher derselbe gleich ist, hängt von den ausserordentlich kleinen Veränderungen des mittleren Molecular-Zwischenraums oder der Dichtigkeit ab, welche in den Gleichungen (11) ausser Acht gelassen sind und diess macht, dass  $p$  ein Unbekannter ist, welcher von dem in diesen Gleichungen enthaltenen Unbekannten  $\rho$  verschieden ist. Diese Grösse  $p$  wechselt in einem sehr grossen Verhältniss für Veränderungen in der Dichtigkeit, welche fast unmerklich sind. In dem Falle einer homogenen tropfbaren Flüssigkeit kann die Dichtigkeit  $\rho$  als constant angesehen werden, nicht aber der Unbekannte  $p$ ; die zweite Gleichung unter (11) verschwindet und die Zahl der Differenzial-Gleichungen des Problems reducirt sich auf vier, wie die der Unbekannten  $p, u, v, w$ .

Betrachten wir noch ferner eine unzusammendrückbare tropfbare Flüssigkeit, und nehmen wir an, dass die Temperatur von einem Punkte zum andern und mit der Zeit sich ändere. Sei  $\zeta$  diejenige, welche der Zeit  $t$  und dem Punkte  $M$  entspricht, und  $\zeta'dt$  ihr Zuwachs während der Zeit  $dt$ , dann wird der Zuwachs  $V'dt$  des Volumens  $V$  den Werthen von  $\zeta'dt$  und  $V$  proportional sein, so dass man

$$V' = \eta V \zeta'$$

hat, wo  $\eta$  einen positiven Coefficienten bezeichnet, welcher eine gegebene Constante sein wird, wenn die Flüssigkeit homogen ist und nur unbeträchtliche



Veränderungen in der Temperatur erleidet, oder im Allgemeinen eine gegebene Function von  $x, y, z$  und  $\zeta$ . Man hat ausserdem, wenn man  $\zeta$  als Function von  $x, y, z$  und  $t$  betrachtet,

$$\zeta' = \frac{d\zeta}{dt} + u \frac{d\zeta}{dx} + v \frac{d\zeta}{dy} + w \frac{d\zeta}{dz}.$$

Mittelst dieses Werthes und des von  $V'$  wird die vorstehende Gleichung

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = \eta \left( \frac{d\zeta}{dt} + u \frac{d\zeta}{dx} + v \frac{d\zeta}{dy} + w \frac{d\zeta}{dz} \right). \quad (12)$$

Diess ist die zweite der gesuchten Gleichungen, welche man zu denen unter (9) und (10) hinzufügen muss. Da sie aber einen neuen Unbekannten  $\zeta$  enthält, so bedarf man noch einer andern Gleichung und dafür wird man diejenige nehmen, welche die Abhängigkeit der Bewegung der Wärme im Innern eines Körpers ausdrückt (und im XIX. Heft des *journal de l'école polytechnique*, Seite 87 entwickelt ist), nemlich

$$\frac{c}{dt} \frac{d\zeta}{dt} = \frac{d \left( c' \frac{d\zeta}{dx} \right)}{dx} + \frac{d \left( c' \frac{d\zeta}{dy} \right)}{dy} + \frac{d \left( c' \frac{d\zeta}{dz} \right)}{dz}, \quad (13)$$

wo  $c$  und  $c'$  beziehlich die specifische Wärme und das Maass der Leitungsfähigkeit im Punkte  $M$  darstellen, welche bei hohen Temperaturen ihrerseits wiederum von  $\zeta$  abhängig sein können. Jedenfalls setzt diese Gleichung voraus, dass die Mittheilung der Wärme in den flüssigen Körpern so wie in den festen Körpern vor sich geht, nemlich mittelst einer Strahlung, welche sich nur in eine unmerkliche Entfernung erstreckt. In den Gasen findet diess nicht statt, und auf diese darf daher diese letztere Gleichung nicht angewendet werden.

Der allgemeinen Gleichungen für die Bewegung einer tropfbaren Flüssigkeit von veränderlicher Temperatur sind also sechs an der Zahl, nemlich die Gleichungen (8), (10), (12) und (13), und diese Zahl ist gleich der der Unbekannten,  $u, v, w, \rho, p$  und  $\zeta$ . In dem Fall einer homogenen Flüssigkeit und wenn man annimmt, dass  $\beta$  nicht merklich mit der Temperatur wechselt, wird man statt der Gleichungen (8) die Gleichungen (9) nehmen können, und wenn man auch die Grössen  $c$  und  $c'$  als nahehin constant annimmt, dann wird die Gleichung (13), wenn man  $\frac{c'}{c} = a^2$  setzt, sich in diese verwandeln:



$$\frac{d\zeta}{dt} = a^2 \left( \frac{d^2\zeta}{dx^2} + \frac{d^2\zeta}{dy^2} + \frac{d^2\zeta}{dz^2} \right). \quad (14)$$

66. Wir wollen nun ermitteln, welche neue Formel man zur Gleichung (10) hinzufügen muss, wenn von einem luftförmigen Fluidum die Rede ist.

Wenn  $p$  oder  $\frac{1}{6a^3} \sum rfr$  der Druck in irgend einem Punkte für den Fall des Gleichgewichts,  $\rho$  die Dichtigkeit und  $\zeta$  die Temperatur ist, so existirt für alle Gase eine durch die Erfahrung gegebene Relation zwischen diesen drei Grössen, welche durch nachstehende Gleichung dargestellt wird:

$$p = b\rho(1 + g\zeta), \quad (15)$$

wo  $b$  und  $g$  constante und positive Coefficienten bezeichnen, von denen der erste von der Natur jedes Fluidums abhängt und der zweite für alle Gase einer und derselbe ist.

Während der Bewegung eines solchen Fluidums verdünnt oder verdichtet sich jeder Theil  $C$  forwährend und in Folge dieser Veränderungen in der Dichtigkeit ändert sich auch die Temperatur und mit ihr die Strahlung der Molecüle des Fluidums. Nun können aber zwei verschiedene Fälle vorkommen, welche es nöthig ist zu unterscheiden.

1°. Die Bewegungen der Molecüle können so langsam sein, dass sich durch die Strahlung in jedem Augenblicke diejenige Temperatur  $\zeta$  herstellt, welche stattfinden würde, wenn sie in Ruhe wären und die Dichtigkeit diejenige wäre, welche in dem Augenblicke wirklich vorhanden ist, nemlich die Dichtigkeit  $\rho$  in einem beliebigen Punkte  $M$ . In diesem Falle wird die Gleichung (15) die gesuchte sein. Wenn die anfängliche Temperatur in dem ganzen Fluidum gleich war, so wird sie dann auch während der Bewegung ungeändert bleiben und man kann dann in dieser Gleichung  $\zeta$  als eine gegebene Constante betrachten. Wenn im Gegentheil die Temperatur am Anfange der Bewegung von dem einen Punkte zum andern verschieden war, so wird sie auch in Verlauf der Zeit  $t$  sich ändern und man wird in der Gleichung (15)  $\zeta$  als eine Function von  $t, x, y, z$  betrachten müssen, welche von dem Anfangswerthe und den Gesetzen für die Strahlung und für die Absorbtion der Wärme in den Gasen abhängig ist.



2°. Oder aber, es können die Vibrationen der Molecüle des Fluidums und mithin auch die Verdichtungen und Verdünnungen, welche dieselben begleiten, so schnell sein, dass während ihrer Dauer jeder Theil  $C$  nur einen unmerklichen Verlust an Wärme erleidet, wie man diess z. B. in Betreff derjenigen Bewegungen der Luft voraussetzt, welche den Schall erzeugen. In diesem Falle wird die Temperatur, welche in jedem Augenblick statt hat, nicht bekannt sein, man wird  $p$  als eine Function der Dichtigkeit  $\rho$  und der Wärmemenge der Molecüle betrachten müssen, welche nicht mehr einfach der Dichtigkeit proportional ist, und man ist in Nro. 39 darauf hingeführt worden,

$$p = A \rho^2 + B \rho^{\frac{2}{3}} \quad (16)$$

für diese Function zu setzen, wo  $A$  und  $B$  Coefficienten sind, welche, unabhängig von  $\rho$ , mit der Materie des Fluidums und seiner Wärmemenge sich ändern und in dem Falle eines homogenen Fluidums, dessen Temperatur vor dem Anfange der Bewegung überall dieselbe ist, constant sein werden. Wenn also die Vibrationen eines elastischen Fluidums sehr schnell sind, so wird man an die Stelle der Formel (15) die (16) setzen können.

Wenn man jedoch keine Hypothese über den Ausdruck von  $p$  in Function von  $\rho$  bei gleicher Wärmemenge machen will, so wird man durch die nachfolgenden Betrachtungen eine Gleichung erhalten, welche unabhängig von jeder besonderen Voraussetzung ist.

67. Sei  $q$  die in  $C$  enthaltene Wärmemenge, welche der Dichtigkeit  $\rho$  und dem Druck  $p$  entspricht, so wird dieselbe als eine Function von  $\rho$  und  $p$  betrachtet werden können, welche wir durch

$$q = f(\rho, p)$$

darstellen wollen. Seien  $p' dt$  und  $\rho' dt$  die Zuwachse von  $p$  und  $\rho$ , welche während der Bewegung des Fluidums durch den Zeitraum  $dt$  hindurch statt haben. Da während dieses Zeittheilchens die Wärmemenge der Molecüle sich nicht merklich ändern wird, so wird man

$$\frac{df}{dp} p' + \frac{df}{d\rho} \rho' = 0$$

haben, eine Gleichung, aus welcher die beiden Differenzial - Quotienten  $\frac{df}{dp}$  und  $\frac{df}{d\rho}$  zu eliminiren sind.



Betrachten wir zu dem Ende den Theil  $C$  des Fluidums in seinem Zustande der Ruhe, und sei  $\zeta$  seine Temperatur, entsprechend der Dichtigkeit  $\rho$  und dem Druck  $p$ , so dass diese drei Grössen unter sich durch die Gleichung (15) verbunden sind. Sei  $s$  die Wärmemenge, welche man zu  $q$  hinzufügen müsste, damit die Temperatur  $\zeta$  in  $\zeta + i$  überginge, ohne dass der Druck  $p$  sich änderte, und  $s'$  die Vermehrung von  $q$ , welche für denselben Zuwachs an Temperatur nöthig sein würde, ohne dass die Dichtigkeit  $\rho$  wechselte. Nimmt man  $i$  sehr klein an und macht

$$\frac{s}{s'} = \gamma,$$

so bezeichnet diess Verhältniss bekanntlich das der specifischen Wärme bei constantem Druck zur specifischen Wärme bei constantem Volumen für das Fluidum, woraus  $C$  besteht. Ferner hat man

$$s' = \frac{df}{dp} \frac{dp}{d\zeta} i, \quad s = \frac{df}{d\rho} \frac{d\rho}{d\zeta} i,$$

und aus der Gleichung (15) folgt

$$\frac{dp}{d\zeta} = h\rho g, \quad \frac{d\rho}{d\zeta} = -\frac{bg\rho^2}{p};$$

man wird also

$$\frac{df}{dp} = \frac{s'\rho}{b\rho^2 gi}, \quad \frac{df}{d\rho} = -\frac{sp}{b\rho^2 gi},$$

und mithin

$$p'\rho - \gamma\rho'p = 0$$

haben, was mit der Gleichung

$$\frac{d\chi t}{dt} \chi t - \gamma \frac{d\chi t}{dt} \psi t = 0$$

übereinstimmt, welche in Nro. 64 vorausgesetzt worden ist.

Betrachtet man  $p$  und  $\rho$  als Functionen von  $x, y, z$  und  $t$ , so hat man

$$p' = \frac{dp}{dt} + u \frac{dp}{dx} + v \frac{dp}{dy} + w \frac{dp}{dz},$$

$$\rho' = \frac{d\rho}{dt} + u \frac{d\rho}{dx} + v \frac{d\rho}{dy} + w \frac{d\rho}{dz},$$



und mittelst dieser Werthe kann man dann die vorhergehende Gleichung in nachstehender Gestalt schreiben:

$$\begin{aligned} & \frac{d \log p}{dt} - \gamma \frac{d \log \rho}{dt} + u \left( \frac{d \log p}{dx} - \gamma \frac{d \log \rho}{dx} \right) + \\ & + v \left( \frac{d \log p}{dy} - \gamma \frac{d \log \rho}{dy} \right) + w \left( \frac{d \log p}{dz} - \gamma \frac{d \log \rho}{dz} \right) = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

und diess wird die gesuchte Gleichung sein.

Mag man nun diese Formel, oder eine der Formeln Nro. (15) oder (16) anwenden, um sie mit den Gleichungen (8) oder (9), und mit der Gleichung (10) zu verbinden, so wird doch immer ihre Anzahl der der Unbekannten des Problems  $u, v, w, \rho, p$ , gleich sein.

68. Die verschiedenen Gleichungen, welche wir bis dahin erhalten haben, beziehen sich auf alle Punkte der Masse des Fluidums, welche in einer merklichen Entfernung von der Oberfläche liegen oder wenigstens in einer Entfernung, welche grösser ist als der Halbmesser der Wirkungssphäre der Molecüle. Zur Vervollständigung des Systems von Differenzial-Gleichungen für die Bewegung der Fluida bleibt uns noch übrig, die besonderen Gleichungen zu bilden, welche an ihren Oberflächen stattfinden und diess soll nun geschehen, indem wir zunächst den Fall eines Fluidums betrachten, welches mit einem festen Körper in Berührung ist. Wir haben (in Nro. 41) schon bemerkt gemacht, wie es möglich ist, dass in diesem Falle eine sehr dünne Schicht des Fluidums sich an die feste Wand anhängt und seine Flüssigkeit verliert; in diesem Falle wollen wir diese Schicht so ansehen, als bildete sie einen Theil der Wand, und als Oberfläche der letzteren werden wir dann diejenige Fläche der genannten Schicht betrachten, welche den flüssig gebliebenen Theil des Fluidums begrenzt.

Denken wir uns den Punkt  $M$ , für welchen wir die Seitenkräfte des inneren Drucks berechnet haben, in eine Entfernung von der Wand versetzt, welche zwar unmerklich, demungeachtet aber grösser ist, als die Summe der Entfernungen, bis zu welchen sich die gegenseitige Wirkung der Molecüle des Fluidums und die Wirkung der Wand auf diese Molecüle erstrecken. Von  $M$  aus werde ein Perpendikel auf die Oberfläche der Wand gefällt, welcher derselben in einem Punkte  $O$  begegne und sodann werde durch den Punkt eine Ebene gelegt, welche auf  $MO$  senkrecht steht. Sei  $C$  ein Cylinder,



welcher einen sehr kleinen Theil  $w$  dieser Ebene zur Grundfläche und  $MO$  zur Höhe hat und  $c, c', c''$  seien die Cosinus derjenigen Winkel, welche die gerade Linie  $MO$  mit den Verlängerungen der Coordinaten  $x, y, z$  des Punktes  $M$  einschliesst. Zerlegt man nun den auf die Einheit der Fläche bezogenen Druck, welcher im Punkte  $M$  am Ende der Zeit  $t$  statt hat, nach den Richtungen der genannten Coordinaten, so werden die daraus hervorgehenden Seitenkräfte die durch die Gleichungen (6) gegebenen Kräfte  $U, V, W$  sein und die Seitenkräfte der Kraft, welche auf  $C$  an seinem Ende  $M$  wirkt, werden ausgedrückt sein durch:

$$wU, \quad wV, \quad wW.$$

Die Seitenkräfte, welche aus der Wirkung der Kräfte  $X = \frac{d^2x}{dt^2}, Y = \frac{d^2y}{dt^2}, Z = \frac{d^2z}{dt^2}$  der Nro. 64 auf die ganze Masse von  $C$  entspringen, werden dem Volumen derselben proportional sein, und im Vergleich zu den Vorigen ausser Acht gelassen werden können und ebenso wird es sich mit der Wirkung verhalten, welche von demjenigen Theil des Fluidums auf  $C$  ausgeübt wird, der zwischen einer durch den Punkt  $O$  gelegten Berührungs-Ebene der festen Wand und der durch  $M$  gehenden Parallelebene liegt. Denn die vollständigen Seitenkräfte dieser Kraft können nur aus einer Verschiedenheit der Materie und der Verdichtung des Fluidums um  $C$  herum entspringen, und werden mithin im zusammengesetzten Verhältniss seiner Dicke und seiner Mantelfläche stehen, also von derselben Ordnung der Grösse sein, wie sein Volumen. Die vorgenannten Kräfte werden daher in jedem Augenblicke den Seitenkräften derjenigen Wirkung das Gleichgewicht halten müssen, welche auf  $C$  an seinem anderen Ende  $O$  ausgeübt wird, mag dieselbe nun von dem Theil der Wand herrühren, welcher an der Berührungs-Ebene endigt, oder von dem festen oder flüssigen Meniscus, welcher zwischen der Fläche und dieser Ebene liegt. Um indessen die Untersuchung zu vereinfachen, wollen wir annehmen, dass diese Fläche innerhalb des Bereiches der Molecular-Wirkung eben sei, und diess läuft darauf hinaus, die Wirkung des Meniscus, welche nur ein sehr kleiner Theil der übrigen auf die Enden von  $C$  wirkenden Kräfte ist, ausser Acht zu lassen.



Stellt man nun am Ende der Zeit  $t$  die drei den Axen der  $x, y, z$  parallelen Seitenkräfte derjenigen Wirkung, welche von der Wand auf ein Molecül von  $C$  ausgeübt wird, durch  $T, T', T''$  dar, so wird man

$$\Sigma T + wU = 0, \quad \Sigma T' + wV = 0, \quad \Sigma T'' + wW = 0, \quad (18)$$

haben, wo die Summen  $\Sigma$  auf alle diejenigen Molecüle von  $C$  zu erstrecken sind, welche in einer unmerklichen Entfernung von der Wand und in dem Bereich ihrer Wirkungssphäre liegen. Im Gleichgewichts-Zustande des Fluidums reduciren sich die Kräfte  $U, V, W$  auf  $cp, c'p, c''p$  und die Mittelkraft aus den Kräften  $\Sigma T, \Sigma T', \Sigma T''$  ist also dann normal gegen die Wandfläche, von dem Innern des Fluidums her nach aussen gerichtet und gleich  $w p$ . Wie gross indessen der Grad der Politur der Wand immerhin sein mag, so wird dennoch ihre Oberfläche immer Unebenheiten enthalten, deren Höhen und Tiefen, wenn man will, unmerklich sind, die indessen nichtsdestoweniger hinreichen werden, hervorzubringen, dass die Mittelkraft aus den Kräften  $T, T', T''$  nicht auf der Wand normal ist, und von einem Punkte von  $C$  zum andern in Grösse und Richtung merklich wechselt. In Folge dieses Umstandes wird dann auch die Dichtigkeit des Fluidums nicht bloss in der normalen Richtung, sondern auch in der Richtung parallel zur Wand wechseln. Wenn man aber annimmt, dass die Abmessungen von  $w$  im Verhältniss zu der Ausdehnung dieser Veränderungen sehr gross seien, so können sich begreiflicherweise die Molecüle des Fluidums in ihrem Zustande des Gleichgewichts so ordnen, dass die Totalkräfte  $\Sigma T, \Sigma T', \Sigma T''$  nicht merklich verschieden sind, wenn man zwei sehr nahe beieinanderliegende Stellungen von  $C$  oder seiner Axe  $MO$  betrachtet und diess ist nöthig, damit sie als den Seitenkräften der Kraft  $w p$  gleich und entgegengesetzt betrachtet werden können. Diess vorausgesetzt, so handelt es sich nun darum, zu sehen, was aus den Gleichungen (18) für den Fall der Bewegung wird, und dazu werden wir mittelst einer Analyse gelangen, welche der in Nro. 61 ähnlich ist

69. Wir wollen die Zeit  $t$  vom Anfang der Bewegung an rechnen, und wenn wir dann, wie in Nro. 60, den Werth von  $p$  zu irgend einem Zeitpunkt mit  $\psi t$  bezeichnen, so werden wir für  $t = 0$  haben:



$$\Sigma T_0 + wc\psi_0 = 0, \quad \Sigma T'_0 + wc'\psi_0 = 0, \quad \Sigma T''_0 + wc''\psi_0 = 0,$$

unter  $T_0, T'_0, T''_0$  die Anfangswerthe von  $T, T', T''$  verstanden.

Seien nun  $ft, f't, f''t$  die Seitengeschwindigkeiten parallel zu den Axen der  $x, y, z$ , für diejenige Geschwindigkeit, welche der Schwerpunkt von  $C$  am Ende einer beliebigen Zeit  $t$  hat. Wenn die Bewegung des Fluidums begonnen hat, so werden die Ortsveränderungen dieses Punktes nach den genannten Richtungen während des unendlich kleinen Zeitraums  $\tau$  durch  $\tau fo, \tau f'o, \tau f''o$  darzustellen sein. Denken wir uns nun, jener Punkt stelle beim Ablauf des genannten Zeitraums seine Bewegung plötzlich ein. Welches nun immerhin die Veränderung sein mag, die in Betreff der Totalwirkung der Wand auf  $C$  im ersten Augenblick eintritt, so können doch die Zuwachse der bezüglichen drei Seitenkräfte nur lineare Functionen der Grössen  $\tau fo, \tau f'o, \tau f''o$ , und überdiess der Grundfläche  $w$  proportional sein. In der allgemeinsten Weise werden sie daher sich darstellen lassen durch:

$$(Pfo + P'f'o + P''f''o) w \tau,$$

$$(Qfo + Q'f'o + Q''f''o) w \tau,$$

$$(Rfo + R'f'o + R''f''o) w \tau,$$

wo  $P, P'$ , u. s. w. Coefficienten sind, welche von der Materie des Fluidums und der der Wand abhängen werden. Nach einer zwar sehr kurzen aber endlichen Zeit werden die Molecüle, welche in der Nähe der Wand liegen, zu einer solchen Anordnung gelangen, dass die Wirkung der Wand eine zu deren Oberfläche normale Richtung hat, wie vor der Bewegung, und dass sie dem Druck am andern Ende von  $C$ , dessen Seitenkräfte dann  $wc\psi_\tau, wc'\psi_\tau, wc''\psi_\tau$  geworden sind, das Gleichgewicht hält. In diesem Augenblick werden also die Zuwachse der Seitenkräfte der Totalwirkung der Wand nach den Richtungen der  $x, y, z$  beziehlich sein:

$$-wc\tau\psi'o,$$

$$-wc'\tau\psi'o,$$

$$-wc''\tau\psi'o,$$

wenn man  $\frac{d\psi}{dt} = \psi't$  setzt, so dass man

$\psi_\tau - \psi_0 = \tau\psi'o$  hat. Vergleicht man nun diese Werthe mit den früheren, so kann man daraus schliessen, dass diese Zuwachse beim Verlauf einer beliebigen Zeit  $t$  ausgedrückt sind durch



$$- w c \tau \psi' o + w (P f o + P' f' o + P'' f'' o + c \psi' o) \tau \varphi' t,$$

$$- w c' \tau \psi' o + w (Q f o + Q' f' o + Q'' f'' o + c' \psi' o) \tau \varphi' t,$$

$$- w c'' \tau \psi' o + w (R f o + R' f' o + R'' f'' o + c'' \psi' o) \tau \varphi' t,$$

unter  $\varphi' t$  eine Function verstanden, welche für  $t = o$  gleich Eins, und dagegen für einen sehr kleinen (aber merklichen) Werth von  $t$  und um so mehr für jeden grösseren gleich Null ist. Diese Function kann von der Wirkung der Wand und von der Compression des Fluidums abhängen, welche nahe bei der Wand sehr verschieden von der in einer merklichen Entfernung ist; man darf daher nicht voraussetzen, dass diese Function dieselbe sei, wie die Function  $\varphi t$  der Nro. 61, welche dem Innern des Fluidums entspricht.

Die Ortsverrückungen  $\tau f \tau$ ,  $\tau f' \tau$ ,  $\tau f'' \tau$  des Schwerpunktes von  $C$ , welche während eines zweiten Zeitraums  $\tau$  statt haben, werden ebenfalls für die Seitenkräfte der Wirkung der Wand auf  $C$  Zuwachse hervorbringen, welche dargestellt sein werden durch

$$- w c \tau \psi' \tau + w (P f \tau + P' f' \tau + P'' f'' \tau + c \psi' \tau) \tau \varphi' (t - \tau),$$

$$- w c' \tau \psi' \tau + w (Q f \tau + Q' f' \tau + Q'' f'' \tau + c' \psi' \tau) \tau \varphi' (t - \tau),$$

$$- w c'' \tau \psi' \tau + w (R f \tau + R' f' \tau + R'' f'' \tau + c'' \psi' \tau) \tau \varphi' (t - \tau),$$

und für die seit dem Anfange der Bewegung verflossene Zeit  $t$  gelten. Und allgemein werden die Ausdrücke für die Zuwachse dieser Seitenkräfte, wie sie durch die Ortsverrückungen  $\tau f n \tau$ ,  $\tau f' n \tau$ ,  $\tau f'' n \tau$  in Bezug auf das  $n^{\text{te}}$  Zeitintervall  $\tau$  am Ende derselben Zeit  $t$  hervorgebracht sind, diese sein:

$$- w c \tau \psi' n \tau + w (P f n \tau + P' f' n \tau + P'' f'' n \tau + c \psi' n \tau) \tau \varphi' (t - n \tau),$$

$$- w c' \tau \psi' n \tau + w (Q f n \tau + Q' f' n \tau + Q'' f'' n \tau + c' \psi' n \tau) \tau \varphi' (t - n \tau),$$

$$- w c'' \tau \psi' n \tau + w (R f n \tau + R' f' n \tau + R'' f'' n \tau + c'' \psi' n \tau) \tau \varphi' (t - n \tau).$$

Daraus folgen für die Werthe der Kräfte  $\Sigma T$ ,  $\Sigma T'$ ,  $\Sigma T''$ , welche der Zeit  $t$  entsprechen, die nachstehenden Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \Sigma T = & - w c (\psi o + \Sigma \tau \psi' n \tau) + w \Sigma (P f n \tau + P' f' n \tau \\ & + P'' f'' n \tau + c \psi' n \tau) \tau \varphi' (t - n \tau), \end{aligned}$$



$$\Sigma T' = -wc'(\psi o + \Sigma \tau \psi' n \tau) + w \Sigma (Qfn \tau + Q'f' n \tau + Q''f'' n \tau + c'\psi' n \tau) \tau \varphi'(t - n \tau),$$

$$\Sigma T'' = -wc''(\psi o + \Sigma \tau \psi' n \tau) + w \Sigma (Rfn \tau + R'f' n \tau + R''f'' n \tau + c''\psi' n \tau) \tau \varphi'(t - n \tau),$$

wo die Summenzeichen in den zweiten Gliedern dieser Gleichung sich auf ganze Zahlen  $n$  beziehen und sich von  $n=o$  bis  $n=m-1$  erstrecken, wenn vorausgesetztermaassen  $t = m\tau$  ist. Da nun  $\tau$  unendlich klein, so hat man

$$\psi o + \Sigma \tau \psi' n \tau = \psi t = p;$$

auch die andern Summen werden sich in bestimmte Integrale verwandeln, und wenn man  $n\tau = \theta$ ,  $\tau = d\theta$  setzt, so kommt

$$\left. \begin{aligned} \Sigma T &= -wcp + w \int_0^t (Pf\theta + P'f'\theta + P''f''\theta + c\psi'\theta) \varphi'(t - \theta) d\theta, \\ \Sigma T' &= -wc'p + w \int_0^t (Qf\theta + Q'f'\theta + Q''f''\theta + c'\psi'\theta) \varphi'(t - \theta) d\theta, \\ \Sigma T'' &= -wc''p + w \int_0^t (Rf\theta + R'f'\theta + R''f''\theta + c''\psi'\theta) \varphi'(t - \theta) d\theta. \end{aligned} \right\} (19)$$

Setzt man sodann diese Werthe in die Gleichungen (18) und ebenso für  $U$ ,  $V$ ,  $W$  ihre Werthe aus (5), unterdrückt auch den gemeinschaftlichen Factor  $w$ , so kommt

$$\left. \begin{aligned} &\int_0^t (Pf\theta + P'f'\theta + P''f''\theta) \varphi'(t - \theta) d\theta \\ &+ c \int_0^t [\varphi'(t - \theta) - \varphi(t - \theta)] d\psi\theta + \int_0^t \varphi(t - \theta) F\theta d\theta = 0, \\ &\int_0^t (Qf\theta + Q'f'\theta + Q''f''\theta) \varphi'(t - \theta) d\theta \\ &+ c' \int_0^t [\varphi'(t - \theta) - \varphi(t - \theta)] d\psi\theta + \int_0^t \varphi(t - \theta) F'\theta d\theta = 0, \\ &\int_0^t (Rf\theta + R'f'\theta + R''f''\theta) \varphi'(t - \theta) d\theta \\ &+ c'' \int_0^t [\varphi'(t - \theta) - \varphi(t - \theta)] d\psi\theta + \int_0^t \varphi(t - \theta) F''\theta d\theta = 0, \end{aligned} \right\} (20)$$



und diess sind die gesuchten drei Gleichungen in Bezug auf die Fläche des Fluidums, welche mit einer festen Wand in Berührung ist. Setzt man darin  $t - \theta = t'$ ,  $d\theta = -dt'$ , so werden die Integrale, welche darin vorkommen,  $\phi$  und  $t'$  zu Grenzen haben, und in Folge der Natur der Functionen  $\phi t'$  und  $\phi' t'$  wird man sie bis zu  $t' = \infty$  erstrecken können, sobald  $t$  nicht mehr sehr klein ist.

70. Ich werde wie in Nro. 62 voraussetzen, dass die Functionen  $\phi t$ ,  $Ft$ ,  $F't$ ,  $F''t$ ,  $ft$ ,  $f't$ ,  $f''t$  im Vergleich zu  $\phi t$  und  $\phi' t$  sehr langsam wachsen; man wird alsdann in den vorhergehenden Gleichungen nur die zwei letzteren Functionen unter den Integralzeichen zu belassen brauchen. Ueberdiess wird man  $ft = u$ ,  $f't = v$ ,  $f''t = w$  setzen können, weil die Geschwindigkeiten aller Punkte von  $C$  in Grösse und Richtung nahehin dieselben und der Geschwindigkeit des Punktes  $M$  gleich sind.

Setzt man der Abkürzung wegen

$$\int_0^\infty \phi' t' dt' = \alpha',$$

so werden die Gleichungen (19) sich in die nachstehenden verwandeln:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma T &= -w c \left( p - \alpha' \frac{d\phi t}{dt} \right) + w \alpha' (Pu + P'v + P''w), \\ \Sigma T' &= -w c' \left( p - \alpha' \frac{d\phi t}{dt} \right) + w \alpha' (Qu + Q'v + Q''w), \\ \Sigma T'' &= -w c'' \left( p - \alpha' \frac{d\phi t}{dt} \right) + w \alpha' (Ru + R'v + R''w), \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

und wenn man noch

$$\int_0^\infty (\phi' t' - \phi t) dt' = \alpha' - \alpha = s$$

setzt, so gehn die Gleichungen (20) in die nachfolgenden über:

$$\left. \begin{aligned} c s \frac{d\phi t}{dt} + \alpha Ft + \alpha' (Pu + P'v + P''w) &= 0, \\ c' s \frac{d\phi t}{dt} + \alpha F't + \alpha' (Qu + Q'v + Q''w) &= 0, \\ c'' s \frac{d\phi t}{dt} + \alpha F''t + \alpha' (Ru + R'v + R''w) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$



und worin für  $Ft$ ,  $F't$ ,  $F''t$  die Werthe aus den Gleichungen (3) zu setzen sein werden. In diesen Gleichungen wird man ohne merklichen Fehler an die Stelle der Coordinaten  $x, y, z$  des Punktes  $M$ , von denen  $u, v, w, \phi t$  Functionen sind, die des Punktes  $O$  der Wand setzen können, welche durch die Gleichung für die Oberfläche der letzteren untereinander verbunden sind.

Die Mittelkraft aus den Kräften  $\Sigma T, \Sigma T', \Sigma T''$ , dividirt durch  $w$  und in entgegengesetzter Richtung genommen wird der auf die Einheit der Fläche bezogene Druck sein, welchen die Wand im Punkte  $O$  zu leiden hat. Man sieht, dass, in Folge der Glieder, welche  $u, v, w$  explicit enthalten, dieser Druck nicht normal gegen die Wand sein wird und dass seine Richtung im Allgemeinen mit der Geschwindigkeit des Fluidums wechseln wird.

Wenn die Wand homogen ist, so leuchtet ein, dass die Kraft  $\Sigma T$ , welche parallel zur Axe der  $x$  liegt, in gleicher Weise von den Geschwindigkeiten  $v$  und  $w$ , welche parallel zu den Axen der  $y$  und  $z$  liegen, abhängen müsse, woraus zunächst nothwendig wird, dass  $P' = P''$  sei. Ferner seien  $v$ , und  $w$ , die Geschwindigkeiten, parallel zu zwei andern Axen, die in der Ebene der  $x, y$  liegen, und  $\delta$  sei der Winkel, den die Richtungen von  $v$  und  $w$ , mit einander einschliessen, so hat man

$$v = v, \cos \delta - w, \sin \delta, \quad w = v, \sin \delta + w, \cos \delta.$$

und da  $\Sigma T$  auch in derselben Weise von den beiden Geschwindigkeiten  $v$ , und  $w$ , abhängen muss, so ist erforderlich, dass man  $P' = P'' = 0$  habe. In derselben Art kann man beweisen, dass  $Q = Q'' = 0$ , und  $R = R' = 0$  ist. Ferner wird jede der drei Seitenkräfte  $\Sigma T, \Sigma T', \Sigma T''$ , in gleicher Weise von der zu ihrer Richtung parallelen Geschwindigkeit abhängen müssen, und man wird daher  $P = Q' = R''$  haben müssen. Setzt man daher

$$\alpha' P = - \mu,$$

so werden die Gleichungen (21) sich auf die Nachstehenden reduciren:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma T &= -w \left[ c \left( p - \alpha' \frac{d\phi t}{dt} \right) + \mu u \right], \\ \Sigma T' &= -w \left[ c' \left( p - \alpha' \frac{d\phi t}{dt} \right) + \mu v \right], \\ \Sigma T'' &= -w \left[ c'' \left( p - \alpha' \frac{d\phi t}{dt} \right) + \mu w \right]. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$



Auch die Gleichungen (22) werden sich vereinfachen. Setzt man darin für  $Ft$ ,  $F't$ ,  $F''t$  ihre Werthe, macht man, wie in Nro. 63,

$$\alpha(k + K) = \beta, \quad \alpha(k - K) = \beta',$$

und setzt man ausserdem

$$\gamma \frac{d\psi t}{dt} - \frac{\beta'}{\rho} \frac{d\chi t}{dt} = \nu \frac{d\psi t}{dt},$$

so werden jene Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \beta \left[ c'' \left( \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} \right) + c' \left( \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right) + 2c \frac{du}{dx} \right] - \mu u + c\nu \frac{d\psi t}{dt} &= 0, \\ \beta \left[ c'' \left( \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \right) + 2c' \frac{dv}{dy} + c \left( \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right) \right] - \mu v + c'\nu \frac{d\psi t}{dt} &= 0, \\ \beta \left[ 2c'' \frac{dw}{dz} + c' \left( \frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz} \right) + c \left( \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \right) \right] - \mu w + c''\nu \frac{d\psi t}{dt} &= 0. \end{aligned} \right\} (24)$$

Man hat hierin für  $\frac{d\psi t}{dt}$  denselben Werth, wie in Nro. 64 zu substituiren.

Für eine unzusammendrückbare Flüssigkeit hat man  $\frac{d\chi t}{dt} = 0$  und mithin  $\nu = \gamma$ . Für ein luftförmiges Fluidum wird dieses  $\nu = \gamma - \frac{\beta'\gamma}{p}$  sein, in der Gleichung (Nro. 64)

$$\frac{d\chi t}{\chi t dt} = \gamma \frac{d\psi t}{\psi t dt}.$$

Der Coefficient  $\beta$ , welcher in den Gleichungen (24) vorkommt, ist derselbe, der schon in den Gleichungen (9) für die inneren Punkte eines Fluidums enthalten ist. Was die Coefficienten  $\mu$  und  $\nu$  anbetrifft, so hängen dieselben von der Natur des Fluidums und der der Wand ab. In dem Falle eines unzusammendrückbaren und homogenen Fluidums, welches durchweg einerlei Temperatur hat, werden sie constant sein. Handelt es sich dagegen um ein luftförmiges Fluidum, so werden sie von dessen veränderlicher Compression abhängen können. Wenn indessen diejenigen Grössen, welche in Bezug auf die Geschwindigkeiten  $u$ ,  $v$ ,  $w$  und in Bezug auf die Ver-



dichtungen und Ausdehnungen von der zweiten Ordnung sind, vernachlässigt werden können, dann wird man sie in den vorstehenden Gleichungen als constant annehmen können. In jedem besonderen Falle müssen ihre Werthe entweder in Zahlen, oder in Functionen der Coordinaten  $x, y, z$  des entsprechenden Punktes gegeben sein.

Wenn die Wand aus zwei verschiedenen Ebenen, oder aus zwei krummen Flächen gebildet ist, deren berührende Ebenen sich unter einem endlichen Winkel schneiden, so werden die vorhergehenden Gleichungen nicht mehr für solche Punkte statt haben, welche in unmerklicher Entfernung von dem Durchschnitt liegen; denn es wird bei ihnen vorausgesetzt, dass man die Wandfläche innerhalb des Bereiches der Molecular-Wirkungssphäre als eben betrachten könne, was in der Nähe jener Linie nicht mehr erlaubt ist. Auch dann, wenn es sich um zwei übereinanderliegende Fluida von verschiedener Materie handelt, werden jene Gleichungen nicht für diejenigen Punkte gelten, welche in der gemeinschaftlichen Durchschnittsline ihrer Trennungsfläche mit einer Wandfläche liegen, gegen welche sie sich stützen.

**71.** Betrachten wir endlich die Oberfläche einer Flüssigkeit, von welcher ein Theil frei ist, und suchen wir für den Fall der Bewegung die Gleichungen, welche sich darauf beziehen. Nehmen wir an, dass in allen Punkten dieser Oberfläche ein normaler und gegebener Druck von aussen nach dem Innern des Fluidums wirke. Ist dann  $M$  ein beliebiger Punkt, welcher in unmerklicher Tiefe liegt, so wird man ohne Schwierigkeit sehen, dass in Bezug auf diesen Punkt die Gleichungen (18) die gesuchten sind, wenn man darin an die Stelle der Kräfte  $\Sigma T, \Sigma T', \Sigma T''$  die drei Seitenkräfte des gegebenen Drucks setzt, welcher dem Fusspunkte  $O$  des Perpendikels entspricht, der von dem Punkte  $M$  auf die freie Oberfläche der Flüssigkeit gefällt ist.

Bezeichnet man daher mit  $\Pi$  diesen auf die Einheit der Fläche bezogenen Druck, und mit  $c, c', c''$  die Cosinus der Winkel, welche die äussere Normale oder die Verlängerung von  $MO$  mit den Axen der  $x, y, z$  bildet, so werden die in Rede stehenden Seitenkräfte durch  $-wc\Pi, -wc'\Pi, -wc''\Pi$



ausgedrückt sein, und wenn man dann den gemeinschaftlichen Factor  $w$  unterdrückt, so werden die Gleichungen (18) übergehen in

$$c\Pi = U, \quad c'\Pi = V, \quad c''\Pi = W, \quad (24)$$

Man wird hierin für  $U, V, W$  ihre durch die Formeln (5) oder (6) gegebenen Werthe zu setzen haben; zu grösserer Genauigkeit wird es aber angemessen sein, auf die vorhin vernachlässigte Krümmung der flüssigen Oberfläche Rücksicht zu nehmen (Nro. 60). Wir werden daher den auf den Zustand des Gleichgewichts bezüglichen Druck  $p$  in diesen Formeln um die Grösse  $H\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'}\right)$  vermehren, (Nro. 58), wo  $H$  eine Constante ist, deren Ziffernwerth sich aus den Erscheinungen der Capillarität ableiten lässt, und  $\lambda, \lambda'$  die beiden Haupt-Krümmungshalbmesser bezeichnen, welche man als positiv oder als negativ ansehen wird, je nachdem das Fluidum im Punkte  $O$  concav oder convex ist. Wir werden nun von den Gleichungen (6) Gebrauch machen, welche allgemein giltig sind, wir werden darin für  $Ft, F't, F''t$  ihre durch die Gleichungen (3) gegebenen Werthe setzen und dabei beachten, dass der Nro. 64 zufolge, für den Fall einer Flüssigkeit

$$\frac{\alpha k}{\chi l} \frac{d\chi t}{dt} = -\frac{3\alpha}{5} \frac{d\psi t}{dt}$$

ist. Setzt man nun für  $\frac{d\psi t}{dt}$  seinen Werth, wie er in derselben Nummer angegeben ist, und macht man der Abkürzung wegen

$$P = \Pi - p - H\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'}\right) + \frac{2\alpha}{5}\left(\frac{dp}{dt} + u\frac{dp}{dx} + v\frac{dp}{dy} + w\frac{dp}{dz}\right),$$

so gehen jene Gleichungen in die nachfolgenden über

$$\left. \begin{aligned} cP - \beta \left[ c'' \left( \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} \right) + c' \left( \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right) + 2c \frac{du}{dx} \right] &= 0, \\ c'P - \beta \left[ c'' \left( \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \right) + 2c' \frac{dv}{dy} + c \left( \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right) \right] &= 0, \\ c''P - \beta \left[ 2c'' \frac{dw}{dz} + c' \left( \frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz} \right) + c \left( \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \right) \right] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$



In diesen Gleichungen kann man für  $x, y, z$  die Coordinaten des Punktes  $O$  nehmen, welcher der flüssigen Oberfläche selbst angehört. Wenn diese Oberfläche zum Theil frei ist und mit einem anderen Theil an einer festen Wand anliegt, dann sind die Gleichungen (23) und (25), welche sich auf diese beiden Fälle beziehen, nicht mehr für diejenigen Punkte gültig, welche in unmerklicher Entfernung von ihrer gemeinschaftlichen Durchschnittslinie liegen. Auch ist zu beachten, dass die Formeln (6) nicht in den ersten Augenblicken gültig sind, wo die Bewegung anfängt, und dass mithin die Gleichungen (23) und (25), und die der Nro. 64, welche sich auf alle Punkte des Fluidums beziehen, in demselben Falle sind. Nun ist aber bei jeder besonderen Aufgabe der Zustand des Fluidums am Anfange der Bewegung dasjenige, was gegeben ist und was zur Bestimmung der willkürlichen Grössen dient, welche zur Vervollständigung der Integrale für die Differenzial-Gleichungen dieser Bewegung gehören. Aber der Hypothese zufolge, auf welche die von uns angewendeten Formeln (6) begründet sind, ändert sich der Zustand des Fluidums während der Zeit, dass diese Formeln gelten, nur wenig. Man wird daher von dieser kleinen Veränderung absehen und annehmen können, dass die gegebenen Anfangswerthe der Unbekannten auch den Anfangswerthen für die Differenzial-Gleichungen und deren Integrale entsprechen.

72. Wenn man die sehr verwickelten Bewegungen der Fluida ausschliesst, in Bezug auf welche es von geringem Nutzen sein würde, die Analysis anzuwenden, so ist man gewohnt, anzunehmen, dass an der freien Oberfläche immer ein und dieselben Molecüle verbleiben. Bezeichne nun  $\Lambda = 0$  die Gleichung für diese Oberfläche am Ende der Zeit  $t$ , wo  $\Lambda$  eine Function von  $t, x, y, z$  ist. Seien  $x', y', z'$  die Anfangs-Coordinaten desjenigen Molecüls, dessen Coordinaten gegenwärtig  $x, y, z$  sind, so werden diese letzteren Functionen von  $t, x', y', z'$  sein, und wenn das in Rede stehende Molecül beständig der freien Oberfläche angehören soll, so ist erforderlich, dass die Werthe von  $x, y, z$  der Gleichung  $\Lambda = 0$  genügen, welches immerhin der Werth von  $t$  sein mag. Das Differenzial von  $\Lambda$ , genommen nach  $t$  und den Coordinaten  $x, y, z$ , die letzteren als Functionen von  $t$  betrachtet, wird also der Null gleich sein müssen, und diess giebt



$$\frac{d\Lambda}{dt} + u \frac{d\Lambda}{dx} + v \frac{d\Lambda}{dy} + w \frac{d\Lambda}{dz} = 0. \quad (26)$$

Diese Gleichung tritt zu denen der vorigen Nummer hinzu. Man darf jedoch nicht vergessen, dass die Gleichungen (25) nothwendig sind und aus den Gesetzen der Mechanik hervorgehen, während die Gleichung (26) nur zugelassen worden ist, um die Allgemeinheit der Frage zu beschränken und diejenigen Bewegungen der Fluida auszuschliessen, deren Betrachtung wegen ihrer Verwicklung unnütz sein würde.

Aus demselben Grunde nimmt man auch in dem Falle, wenn das Fluidum sich gegen eine feste oder bewegliche Wand anlehnt, an, dass immer dieselben Molecüle mit der Wandfläche in Berührung sind. Bezeichnet  $L = 0$  die Gleichung für letztere in irgend einem Augenblick, so ist, da  $L$  eine Function von  $x, y, z$  und  $t$  ist,

$$\frac{dL}{dt} + u \frac{dL}{dx} + v \frac{dL}{dy} + w \frac{dL}{dz} = 0 \quad (27)$$

und diese Gleichung muss zu den Gleichungen (23) hinzugefügt werden. Nach bekannten Formeln hat man übrigens

$$\frac{dL}{dx} = cL', \quad \frac{dL}{dy} = c'L', \quad \frac{dL}{dz} = c''L',$$

wo, der Abkürzung wegen

$$\frac{dL^2}{dx^2} + \frac{dL^2}{dy^2} + \frac{dL^2}{dz^2} = L'^2$$

gesetzt worden ist. Ist die Wand fest, so wird die Function  $L$  die Zeit nicht implicit enthalten, das erste Glied der Gleichung (27) wird mithin Null sein, und diese Gleichung wird dann in

$$cu + c'v + c''w = 0$$

übergehen. Letztere drückt aus, dass die normale Geschwindigkeit jedes Molecüls, welches mit der Wand in Berührung ist, gleich Null sei, was im



Fall einer festen Wand in der That dieselbe Bedingung ist, als die, dass dasselbe immer mit der Wandfläche in Berührung bleibe.

73. Ich schliesse diese Abhandlung mit einer Bemerkung, welche geeignet ist, eine Ansicht zu berichtigen, die man bisher ohne alle Beschränkung für zulässig gehalten hat.

Die Differenzial-Gleichungen für die Bewegung der Fluida werden bekanntlich einfacher, wenn der Ausdruck

$$u dx + v dy + w dz$$

das vollständige Differenzial einer Function der drei unabhängig Variabeln  $x, y, z$  ist, welche ausserdem auch die Zeit  $t$  enthalten kann. Nun nimmt man für richtig an, dass diese Bedingung während der ganzen Dauer der Bewegung erfüllt sei, wenn sie es zu einem bestimmten Zeitpunkt, z. B. beim Anfang der Bewegung ist. Der Beweis, welchen man für diesen Satz gibt, setzt aber voraus, dass die Werthe von  $u, v, w$  nicht allein den Differenzial-Gleichungen für die Bewegung, sondern auch noch allen denjenigen genügen, welche man durch Differenziationen in Bezug auf  $t$  daraus ableiten kann. Diess ist nun für solche Ausdrücke von  $u, v, w$ , welche nach Reihen von Exponential-Grössen oder von Sinus und Cosinus fortlaufen, deren Exponenten und Bogen der Zeit proportional sind, nicht immer der Fall, und da der Beweis für diesen Fall nicht gilt, so kann es kommen, dass der Ausdruck  $u dx + v dy + w dz$  wohl für den Anfang der Bewegung ein vollständiges Differenzial ist, nicht aber für jede andere Epoche. In den künftigen Anwendungen auf verschiedene Untersuchungen, welche wir von den Formeln dieser Abhandlung machen werden, werden wir Beispiele dafür liefern und jene Bemerkung noch weiter entwickeln. Die Ausdrücke für  $u, v, w$ , welche in Rede stehen, genügen den Differenzial-Gleichungen, die sich auf das Innere und auf die Oberfläche in Bewegung befindlicher Fluida beziehen. Bestimmt man die Coefficienten der darin vorkommenden Exponential-Grössen, sowie der Sinus und Cosinus angemessen, so stellen sie den gegebenen Anfangszustand aller Molecüle dar. Diess und ausserdem der Umstand, dass die hervorgehenden Reihen convergent sind, genügt, um sie als die Lösung des Problems ansehen zu dürfen,



obgleich und trotzdem eine ihrer besondern **Eigenschaften** die ist, dass sie nicht immer auch denjenigen **Gleichungen** genügen, welche aus den für die **Aufgabe** ursprünglich gegebenen durch neue **Differenziationen** abgeleitet werden können.









Otto, F.

Ueber die Umdrehung der Artillerie-Geschosse

Bd.: [2,]2

Berlin 1847

4 App.mil. 62 t-1/2,1/2

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10220917-4